

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Luka Marčič

MILNORJEVE INVARIANTE ZA SPLETE

Magistrsko delo

Mentorica: doc. dr. Eva Horvat

Ljubljana, 2025

Zahvala

Jerneju in Moyi, ker si najboljši brat, ki bi ga lahko imel, and for bringing a smile to Jernej's face. Mami, za brezmejno podporo in ljubezen skozi leta. Atiju, Brini in Simoni, za vse lepe trenutke in spomine. Mentorici, za odličen predlog tematike in za vodstvo pri študiju – veselim se nadaljnjega dela z vami. Kolegom in kolegicam, profesorjem in profesoricam, vsem, ki so mi stali ob strani.

In seveda Emi. Besede ne naredijo pravice sreči, ki mi jo prinašaš.

»Proof and conjecture, and keep the SF's score low.«

Kazalo

Uvod	1
1 Osnove teorije spletov	2
1.1 Osnovne definicije	3
1.2 Krotki in divji spleti	6
1.3 Diagrami spletov	8
1.4 Orientirani spleti	11
1.5 Spletno število	13
1.6 Fundamentalna grupa	15
2 Predal z algebraičnim orodjem	18
2.1 Razširitve prostih grup	18
2.2 Spodnje centralno zaporedje	23
3 Poldnevnik in vzporednik	25
4 Spletna homotopija in spletna grupa	29
4.1 Spletna homotopija	29
4.2 Spletna homotopija in spletno število	32
4.3 Spletna grupa	33
4.4 Spletna grupa, poldnevniki in vzporedniki	37
4.5 Spletna grupa in konjugiranostni razredi	39
4.6 Klasifikacija 2-spletov do spletne homotopije natančno	41
5 Chen-Milnorjeva predstavitev	41
5.1 Milnorjev izrek	42
5.2 Milnorjev izrek, poldnevniki in vzporedniki	43
5.3 Chen-Milnorjeva predstavitev	45
5.4 Spletna grupa spleta v evklidskem prostoru	50
6 Milnorjeve številske invariante	52
6.1 $\bar{\mu}$ koeficienti	53
6.2 Invarianta za ambientno izotopijo	55
6.3 Invarianta za spletno homotopijo	57
6.4 Lastnosti $\bar{\mu}$ invariant	58
7 Rezultati, primeri in nevšečnosti	61
7.1 Spletno število je $\bar{\mu}$ invarianta	61
7.2 Primeri	61
7.3 Skoraj preprosti spleti	64
7.4 Klasifikacija 3 in 4 spletov do spletne homotopije natančno	70
7.5 Nadaljnje delo	72
Dodatek: Dokaz izreka 5.3	74
Literatura	81

Milnorjeve invariante za splete

POVZETEK

Magistrsko delo predstavi spletno homotopijo in Milnorjeve invariante za ambientno izotopijo in tudi za spletno homotopijo, s poudarkom na Milnorjevih številskih invariantah. To stori z definicijami in dokazi relevantnih rezultatov, posebej v povezavi s spletno grupo in družino kvocientnih grup fundamentalne grupe, za katere obstaja Chen-Milnorjeva predstavitev.

Milnor's link invariants

ABSTRACT

This master's thesis presents link homotopy and Milnor's invariants for both ambient isotopy and link homotopy, with an emphasis on Milnor's numerical invariants. It does so by defining and proving all the relevant results, particularly regarding the link group and a family of quotient groups of the fundamental group for which the Chen-Milnor presentation exists.

Math. Subj. Class. (2020): 57K10, 57K12

Ključne besede: splet, spletno število, spletna homotopija, spletna grupa, Milnorjeve $\bar{\mu}$ invariante

Keywords: link, linking number, link homotopy, link group, Milnor's $\bar{\mu}$ invariants

Uvod

Osrednja tematika tega magistrskega dela so invariante v teoriji spleto, ki jih je razvil John Milnor v svoji magistrski [11] in doktorski [10] disertaciji v petdesetih letih prejšnjega stoletja. Poudarek je predvsem na celoštevilskih invariantah, ki jih izluščimo iz kvocientov fundamentalnih grup spleto. Te služijo kot močno orodje pri preučevanju spleto v kontekstu ambientne izotopije, običajne ekvivalenčne relacije, ki jo definiramo na spletih, še toliko bolj pa v kontekstu spletne homotopije, kjer z njihovo uporabo lahko dosežemo tudi močne klasifikacijske rezultate. Za razumevanje vsebine tega magistrskega dela je pričakovano splošno znanje temeljnih tematik algebraične topologije, ki ga lahko neuki bralec ali bralka pridobi v kateremkoli standardnem učbeniku s tega področja, čeprav avtor priporoča predvsem zelo znan učbenik z naslovom »Algebraic topology« [6], ki ga je napisal Allen Hatcher.

Namen prvega poglavja je seznaniti bralce in bralke z osnovami teorije spleto, oziroma jih opomniti o ključnih konceptih, v kolikor so se s tematiko že soočili v preteklosti. V njem so definirani pojmi in objekti, s katerimi se bomo srečevali v nadaljnjih poglavjih, ter standardizirane oznake, ki jih bomo uporabljali, začenši z definicijo spleta in ambientne izotopije med spleti. Predstavljene so tudi nekatere standardne konstrukcije in invariante s tega področja, kot so diagrami spleto, spletno število in fundamentalna grupa. Trditve in izreki so podani brez dokazov, saj jih lahko najdemo v mnogih standardnih učbenikih. Med njimi bi avtor izpostavil dva, ki sta se izkazala za posebej uporabna pri pisanju tega magistrskega dela in pri študiju nasploh: to sta »Knots« [2], ki sta ga napisala Gerhard Burde in Heiner Zieschang, ter starejši »Knots and links« [13], ki ga je napisal Dale Rolfsen.

Drugo poglavje predstavi nekaj standardnih algebraičnih definicij in rezultatov, ki jih bomo potrebovali kasneje. Osrednja dva pojma tega poglavja sta Magnusova razširitev in spodnje centralno zaporedje. Dokazi iz poglavja temeljijo v glavnini na čudovitem učbeniku »Combinatorial group theory« [9], ki so ga napisali Wilhelm Magnus, Abraham Karrass in Donald Solitar.

V tretjem poglavju so definirani poldnevnik in vzporedniki, množice elementov fundamentalne grupe spleta (in posledično kvocientov te grupe), ki so ključnega pomena za razumevanje struktur in predstavitev grup, predstavljenih v kasnejših poglavjih. Poleg definicij so podane tudi osnovne relacije med posameznimi poldnevnik in vzporedniki, ter metode iskanja teh elementov v grupah spleto v evklidskem prostoru.

Četrto poglavje vpelje ekvivalenčno relacijo spletne homotopije in problem klasifikacije spleta do spletne homotopije natančno. V ta namen najprej obravnava dodatno potezo na diagramih spleta, ki skupaj z Reidemeistrovimi potezami zajame spletno homotopijo, nato spletno število, ki se v tej novi luči izkaže za preprosto, a močno invarianto, za tem pa se osredotoči na spletno grupo, ki je osrednja tematika Milnorjevega članka iz leta 1954 z naslovom »Link groups« [11], kjer je bila spletna homotopija tudi prvič definirana. Predstavljeni so ključni strukturni rezultati o spletni grupi, predvsem v povezavi s poldnevnikom in vzporednikom, ter pomemben izrek, ki nam določi, kdaj sta dva spleta spletno homotopna. Poglavje se zaključuje z zanimivo uporabo tega izreka: klasifikacijo 2-spleto v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno.

Cilj petega poglavja je predstaviti družino kvocientnih grup fundamentalne grupe

spleta, ki se izkaže za močno invarianto ambientne izotopije. Te grupe je najprej definiral Kuo-Tsai Chen v članku »Isotopy invariants of links« [3], leta 1957 pa je Milnor v članku »Isotopy of links« [10] izpilil njihovo predstavitev in uporabo. Dokaz ključnega izreka je dolg in tehničen, zato je v namen preglednosti podan ločeno v dodatku [D]. Definiciji in osnovnim izrekom sledijo strukturni rezultati v povezavi s poldnevnikom in vzporednikom, ki spominjajo na podobne rezultate o spletni grupi iz prejšnjega poglavja. Glavni rezultat tega poglavja je Chen-Milnorjeva predstavitev za te kvocientne grupe spletov v evklidskem prostoru, ki je osrednjega pomena za izpeljavo in razumevanje številskih invariant v šestem poglavju. Predstavitev temelji na Wirtingerjevi prezentaciji, vendar je zaradi manjšega števila generatorjev veliko bolj obvladljiva. Poglavje se zaključi s povezavo med spletno grupo in obravnavanimi kvocientnimi grupami ter predstavitev spletno grupe spleta v evklidskem prostoru, ki temelji na Chen-Milnorjevi predstavitvi.

V šestem poglavju so predstavljeni μ koeficienti, ki jih definiramo kot koeficiente pred monomi v Magnusovi razširitvi vzporednikov v Chen-Milnorjevi predstavitvi. S primerom pokažemo, da ti koeficienti v splošnem niso invariante niti za ambientno izotopijo niti za spletno homotopijo, nato pa vpeljemo nove, bolj precizne $\bar{\mu}$ koeficiente, ki so definirani kot kongruenčni razredi μ koeficientov po modulu največjega skupnega delitelja določene množice μ koeficientov. Ti se v splošnem izkažejo za invarianto ambientne izotopije, v posebnih primerih pa tudi za invarianto spletne homotopije. Pred zaključkom poglavja je predstavljenih še nekaj računskih lastnosti $\bar{\mu}$ invariant.

Zadnje poglavje se osredotoči na praktične primere uporabe $\bar{\mu}$ invariant. Predstavljenih je več primerov/zgledov spletov, za katere so invariante izračunane. Poglavje nato predstavi družino spletov, ki se imenujejo skoraj preprosti spleti, za katere se $\bar{\mu}$ invariante izkažejo kot dovolj močna invarianta za popolno klasifikacijo do spletne homotopije natančno. Ta klasifikacija je bila prvič predstavljena v Milnorjevem prvotnem članku »Link groups« [11]. Poglavje se nadaljuje z rezultatom iz istega članka, to je klasifikacija 3-spletov v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno. Šele štiriintrideset let kasneje, leta 1988, pa je ameriški matematik Jerome Paul Levine v članku »An approach to homotopy classification of links« [7] uspel klasificirati 4-splete do spletne homotopije natančno, kar je dosegel z izostritvijo $\bar{\mu}$ invariant. Poglavje se zaključi z razpravo o potencialnem bodočem delu na tem področju.

1 Osnove teorije spletov

Prvi rezultat teorije spletov se pogosto pripisuje nikomur drugemu kot Carlu Friedrichu Gaussu, čigar vplivu v moderni matematiki težko uideemo. Seveda je Gauss teorijo spletov razumeval nekoliko drugače, kot ga razumemo dandanes. S tem mislimo predvsem, da je sploh ni dojemal kot ločeno področje matematike, saj se je ukvarjal le s številsko invarianto dveh preprostih sklenjenih krivulj, ki jo je razvil leta 1833. Tej invarianti sedaj rečemo spletno število (več o tem kasneje). Modernejši pristopi, ki bi bili matematikom v enaindvajsetem stoletju bolj domači, so bili razviti v drugi polovici devetnajstega stoletja pod vplivom fizikalne teorije Williama Thomsona (tudi znanega kot Lorda Kelvina). Teorija je predpostavila model novo-

odkritih atomov, v katerem so atomi predstavljeni z vozli in spleti. Matematiki in fiziki so se v namen razumevanja atomov prvič poglobili v matematično obravnavo vozlov, rezultat dela pa so bile prve vozelné tabele. Področje je zacvetelo po prelomu dvajsetega stoletja kot vir zanimivih problemov, s katerimi so se matematiki tistega obdobja spopadli z uporabo novih napredkov in rezultatov v topologiji. Od takrat dalje je raziskovanje na področju teorije vozlov in spletov neprestano aktivno, tako v teoretični matematiki, kot tudi v uporabni matematiki, kjer se je za teorijo spletov našlo veliko praktičnih uporab, predvsem na fizikalnih področjih, kot sta elektromagnetizem in teorija strun, ter v biologiji, kjer se preučuje vozlanje in prepletanje proteinov.

Rezultati, predstavljeni v tem poglavju, so tako znani, da so postali folklor. V večini se bomo naslanjali na učbenik »Knots« [2] avtorjev Gerhard Burde in Heiner Zieschang. Začeli bomo z osnovami: kaj je splet ter kako definiramo enakost/ekvivalentnost med spleti. Nadaljevali bomo z definicijo diagramov, ki nam omogočajo lažjo obravnavo spletov v evklidskem prostoru, nato pa definirali spletno število in fundamentalno grupo orientiranega spleta, dve invarianti, ki bosta služili kot osnovni orodji za nadaljnja poglavja.

1.1 Osnovne definicije

Vozel v formalnem matematičnem smislu je bržkone drugačen, kot ga dojemamo v vsakdanu, saj ga navadno ne moremo zavezati ali odvezati, kar je glavna uporabnost vozlov v praksi. Ravno ta lastnost pa nam da koherentno matematično teorijo: namreč, če bi lahko vozle prosto zavezovali ali odvezovali, bi, matematično gledano, med njimi težko razlikovali v kakršnemkoli formalnem smislu. Tako vozle intuitivno definiramo kot zavozlane sklenjene krivulje v prostoru, splete pa kot urejene n -terice paroma disjunktne vozlov. V splošnem jih lahko definiramo v poljubni dovolj lepi tridimenzionalni mnogoterosti. Formalno gledano lahko to storimo na več ekvivalentnih načinov, za nas pa se bo izkazalo praktično splete dojemati bodisi kot vložitve n -terice paroma disjunktne krožnice (v primerni mnogoterosti), bodisi kot sklenjene enodimenzionalne podmnogoterosti. Ker vložitev n -terice paroma disjunktne krožnice v (dovolj lepo) tridimenzionalno mnogoterost določa sklenjeno enodimenzionalno podmnogoterost (sliko vložitve), sklenjena enodimenzionalna podmnogoterost pa določa vložitev (te podmnogoterosti, ki je homeomorfna n -terici paroma disjunktne krožnice, v mnogoterosti), lahko ti dve definiciji enačimo.

Definicija 1.1 (Spleti in vozli). Naj bo M povezana, orientabilna in triangulabilna tridimenzionalna mnogoterost in $n \in \mathbb{N}$. Vložitev

$$L : \bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}_i^1 \hookrightarrow M$$

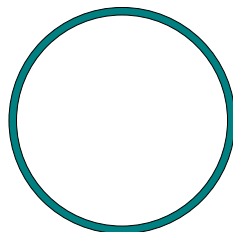
disjunktne unije n -terice krožnic v M imenujemo **n -splet L v M** . Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ pravimo vložitvi $\mathbb{S}_i^1 \hookrightarrow M$ i -te kopije krožnice **i -ta komponenta spleta L** in jo označimo z L_i . Splet z eno samo komponento imenujemo **vozel**. Mnogoterosti M pravimo **ambientni prostor** spleta L .

Opomba: Pogosto bomo tako z besedami kot z oznako enačili splet in njegovo sliko, ki je sklenjena enodimenzionalna podmnogoterost v M .

V namen preprostosti bomo v nadaljevanju izpuščali pisanje zahtevanih pogojev za mnogoterost M , naštetih v definiciji 1.1, čeprav jih vedno privzamemo. Najpogosteje bomo za ambientni prostor M vzeli evklidski tridimenzionalni prostor $\mathbb{R}^3$ (ekvivalentno bi lahko vzeli njegovo kompaktifikacijo $\mathbb{S}^3$). V tem primeru bomo o spletih lahko povedali bistveno več.

Pred nadaljevanjem si oglejmo nekaj preprostih primerov.

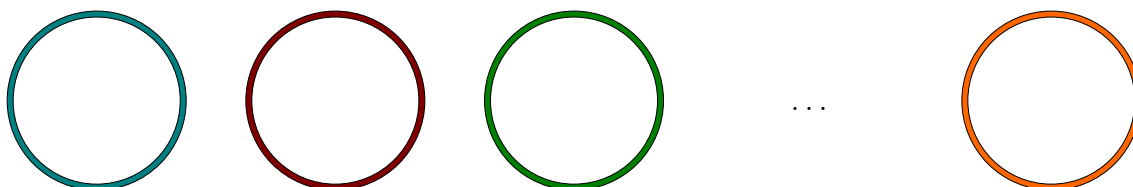
Primer 1.2. Najpreprostejši vozel v evklidskem prostoru je nevozel, ki ga lahko vidimo na sliki 1. Je tudi edini vozel, ki ga lahko vložimo v ravnino.



Slika 1: Nevozel.

◇

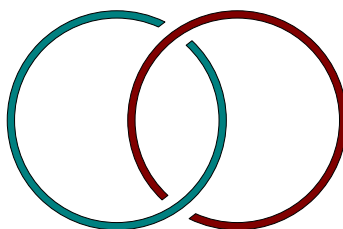
Primer 1.3. Na sliki 2 vidimo n -terico kopij nevozla iz prejšnjega primera 1.2 v evklidskem prostoru. Temu spletu pravimo trivialen n -splet, saj komponente niso prepletene (lahko jih ločimo z disjunktnimi odprtimi okolicami, ki so homeomorfne odprtim kroglam), nobena od komponent pa ni zavozlana (kaj to pomeni, bomo spoznali kmalu).



Slika 2: Trivialen n -splet.

◇

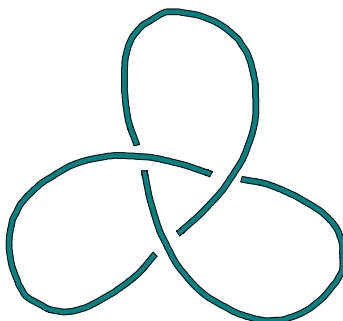
Primer 1.4. Slika 3 prikazuje Hopfov splet, najpreprostejši netrivialen 2-splet. Sestavljen je iz dveh krožnic, ki se prepletata kot dva člena v verigi. Splet je tesno povezan z zgodovinsko pomembnim Hopfovim vlaknenjem $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$, od koder tudi pride poimenovanje. Slikovni prikaz Hopfovega vlaknenja se pojavi tudi na naslovnici učbenika za algebraično topologijo Allena Hatcherja [6].



Slika 3: Hopfov splet.

◇

Primer 1.5. Vozel, skiciran na sliki 4, se imenuje deteljica. Velja za najpreprostejši netrivialen vozol.



Slika 4: Deteljica.

◇

Nadaljujemo s formalizacijo koncepta enakosti spleto. V ta namen seveda definiramo ekvivalenčno relacijo na množici vseh spleto, ni pa takoj jasno, kako naj bo ta ekvivalenčna relacija definirana. Kot bomo videli v poglavju 4, se bo izkazalo, da je smiselnih izbir v resnici več. Za trenutek se osredotočimo na najbolj običajno in najbolj preučeno. Intuitivna ideja, ki bi jo radi zajeli, je zvezna deformacija ambientnega prostora, ki bo prvi splet prenesla v drugega.

Homotopija, običajna topološka ekvivalenčna relacija med preslikavami, se izkaže za preprosto: vemo, da so vse vložitve $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ homotopne, saj je $\mathbb{R}^3$ kontraktibilna. Homotopiji

$$H : \bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M$$

z dodatnim pogojem, da je ob vsakem času $t \in [0, 1]$ preslikava H_t vložitev, pravimo izotopija. Izkaže se, da tudi izotopija ni ustrezna izbira, saj lahko z njo spet trivializiramo vse vozle v $\mathbb{R}^3$, tako, da kontraktiramo njihove zavozlane dele v točko. Za dobro formalizacijo bomo potrebovali še dodaten pogoj, da se struktura ambientnega prostora ohranja, kar nas vodi do naslednje definicije:

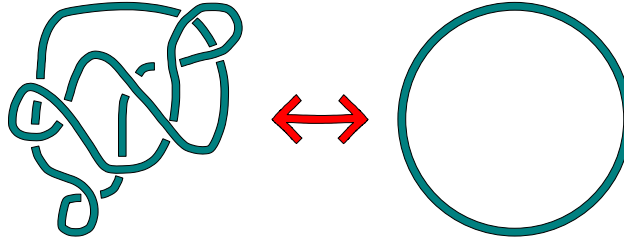
Definicija 1.6 (Ambientna izotopija). Dva n -spleta L in L' v mnogoterosti M sta **ambientno izotopna**, če obstaja ambientna izotopija med njima, torej zvezna preslikava $H : M \times I \rightarrow M$, kjer je $H_t : M \rightarrow M$ homeomorfizem za vsak t , $H_0 = id_M$ in $L = H_1 \circ L'$.

Ambientne izotopije nam definirajo ekvivalenčno relacijo na spletih.

Čeprav definicija 1.6 idejno ni zelo kompleksna, je z njo v praksi težko ravnati. Že v relativno preprostih primerih je praktično nemogoče direktno pokazati, da sta dva spleta ambientno izotopna.

Primer 1.7. Trdimo, da sta vozla, ki sta prikazana na sliki 5, ambientno izotopna. Intuitivno to lahko vidimo tako, da si predstavljamo, da levi vozol zvezno premikamo v prostoru, dokler ga ne spremenimo do desnega. Težko pa je poiskati preslikavo,

ki bo enega od spletov prenesla v drugega in bo hkrati homeomorfizem ob vsakem danem času.



Slika 5: Ambientno izotopna vozla.

◇

V namen razlikovanja med spleti bomo uporabljali invariante. To so raznoliki matematični objekti, kot so številke, grupe ali polinomi, ki jih pripišemo danemu spletu. Ključnega pomena je, da se ohranjajo (v kontekstu ekvivalence obravnavanega objekta, torej npr. izomorfizma grup ali do množenja polinoma z nekim faktorjem natančno) pri spremembah spleta, ki jih inducirajo ambientne izotopije. Le nekaj invariant je dovolj natančnih, da popolnoma ločijo med spleti. Iz predpostavke, da sta dva spleta ambientno izotopna, sledi, da imata ekvivalentne invariante, obratno pa v splošnem ni nujno res. Navadno so prav invariante, ki jih lažje izračunamo, manj zmožne ločevanja med spleti, invariante, ki dobro ločijo med spleti, pa so zelo težko izračunljive ali primerljive. Omenimo, da v splošnem ne obstaja algoritem, ki bi ugotovil, ali sta dva spleta ambientno izotopna ali ne.

1.2 Krotki in divji spleti

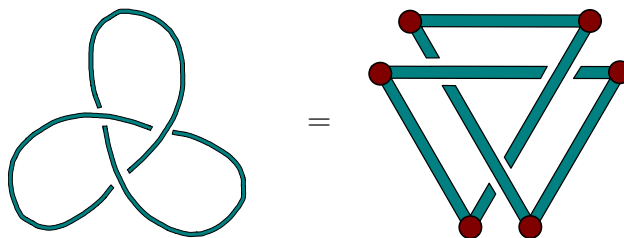
Oglejmo si naslednjo posebej lepo družino spletov v $\mathbb{R}^3$:

Definicija 1.8 (Kosoma linearni spleti). Vozel L v $\mathbb{R}^3$ je **kosoma linearen**, če je enostavna, sklenjena, kosoma linearna krivulja, oziroma, če je določen z urejeno k -terico paroma različnih točk $(p_0, \dots, p_{k-1})$, ki jim pravimo **vozlišča**, in odprtimi daljicami $r_i : (1-t)p_i + tp_{i+1}$ za $t \in (0, 1)$ in $i \in \mathbb{Z}_k$, tako da velja $p_i \cap r_j = r_i \cap r_j = \emptyset$ za vsaka $i, j \in \mathbb{Z}_k$.

Poljuben splet L je **kosoma linearen**, če je vsaka njegova komponenta kosoma linearna.

Vsi spleti, ki smo jih videli do sedaj, so ambientno izotopni kosoma linearnim spletom.

Primer 1.9. Slika 6 prikazuje deteljico v kosoma linearni obliki.



Slika 6: Deteljica v kosoma linearni obliki.

◇

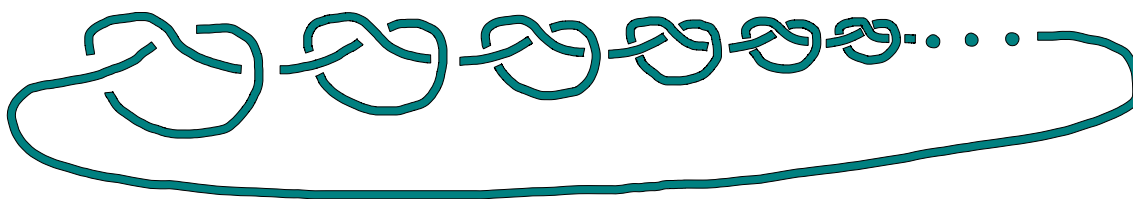
V splošnem ločimo splete v $\mathbb{R}^3$, ki jih lahko predstavimo kot kosoma linearne, ter splete, ki jih ne moremo.

Definicija 1.10 (Krotki in divji spleti). Splet L v $\mathbb{R}^3$ je **krotek**, če je ambientno izotopen kosoma linearnemu spletu.

Splet L je **divji**, če ni krotek.

Krotki spleti so tisti, ki imajo v nekem smislu končno prepleteno in zavozlano strukturo. Te lahko poljubno natančno aproksimiramo s končnim številom vozlišč in daljic med njimi. Na drugi strani imamo divje vozle, kjer tega po definiciji ne moremo storiti, kar pomeni, da imajo neskončno zavozlano strukturo. Spodaj sta skicirana dva primera.

Primer 1.11. Na sliki 7 je orisan primer divjega vozla, v katerem se neskončnokrat ponovi deteljica. Struktura, ki jo tak vozle nosi, je gotovo zelo kompleksna.



Slika 7: Divji vozle.

◇

Primer 1.12. Slika 8 prikazuje še en primer divjega vozla. Gre za znamenit vozle, ki ga je obravnaval matematik Ralph Fox, ki se je ukvarjal (med drugim tudi) s teorijo vozlov. Fox je bil mentor Johna Milnorja pri Milnorjevem magistrskem in doktorskem delu, ki služita kot osnovna literatura tega magistrskega dela. Čeprav na videz izgleda, kot da bi vozle lahko induktivno razvezali in s tem trivializirali, sta leta 1948 Fox in Artin (še en velikan tega področja in matematike nasploh) pokazala, da gre za netrivialen vozle, kar kaže na to, kako nepredvidljivo se lahko obnašajo divji vozli.



Slika 8: Foxov divji vozle.

◇

Izkaže se, da je večina vozlov v evklidskem prostoru divjih, v smislu, da v prostoru vseh vložitev $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, opremljenem z metrično topologijo supremum metrike, množica vseh divjih vozlov vsebuje gosto G_δ podmnožico. To trditev je leta 1964 dokazal prav Milnor v članku »Most knots are wild« [12]. Po drugi strani se le majhen del teorije vozlov ukvarja z divjimi vozli, saj je o njih težko karkoli povedati. Tako se bomo mi, kot večina avtorjev, omejili le na krotke vozle. Za vse obravnavane splete v evklidskem prostoru, torej predpostavimo, da so krotki, četudi to ni izrecno omenjeno.

1.3 Diagrami spletov

Sedaj si oglejmo najbolj pogost način za prikaz spletov v evklidskem prostoru – diagram spleta. Gre za "dovolj lepo" projekcijo spleta na ravnino z označenimi dodatnimi informacijami. Pri tem smo v resnici smo že malo goljufali, saj smo diagrame v tem poglavju že videli: primeri krotkih spletov, ki smo jih podali do sedaj, so bili v bistvu primeri diagramov spletov. Začnimo s formalnimi pogoji, kaj pomeni, da je projekcija na ravnino "dovolj lepa".

Definicija 1.13 (Regularne projekcije). Projekcija spleta v $\mathbb{R}^3$ na ravnino je **regularna**, če je injektivna povsod razen v končnem številu dvojnih točk, za vsako dvojno točko pa obstaja okolica, ki sliko spleta seka v dveh enostavnih krivuljah, ki se v dvojni točki sekata transverzalno.

Točka na ravnini, v katero bi se slikale tri ali več točk iz spleta, bi na projekciji napravila zmedo, saj ne bi mogli določiti, kateri deli spleta so bili povezani pred projekcijo. Podobno zmedo bi napravila dvojna točka, v kateri bi se dva dela spleta le dotikala. Omembe vredno je, da bo za vsak netrivialen splet slika regularne projekcije vsebovala dvojno točko (izkaže se, da v resnici vsebuje najmanj dve, ta minimum pa doseže Hopfov splet). Če sliko regularne projekcije opremimo z dodatno strukturo, ki zabeleži interakcije spleta v dvojnih točkah, dobimo diagram.

Definicija 1.14 (Diagram spleta). Naj bo L splet v $\mathbb{R}^3$, ki ga z regularno projekcijo $\varphi : L \rightarrow \Sigma$ projiciramo na neko ravnino Σ . Izberimo si eno od strani ravnine, to je komponento za povezanost v $\mathbb{R}^3 - \Sigma$, ki si jo predstavljamo kot izbiro naše perspektive, torej stran, s katere bomo gledali na ravnino. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je φ projekcija na ravnino $\Sigma : z = 0$ in da smo izbrali polprostor $z > 0$. Naj bo $\pi_z : (x, y, z) \mapsto z$ projekcija na z -os. Definiramo

$$D = \{(p, p') \in L \times L \mid \varphi(p) = \varphi(p') \text{ in } \pi_z(p) > \pi_z(p')\},$$

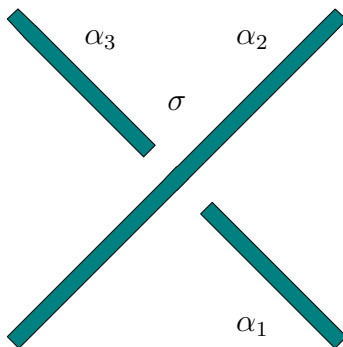
množico parov praslik vseh dvojnih točk projekcije φ , pri čemer je prva točka bližje naši izbrani perspektivi kot druga. Naj bo $0 < \varepsilon \ll 1$ dovolj majhen, da sta za vsak par $(p, p') \in D$ preseka $N_{(p,p')} := K(p, \varepsilon) \cap L$ in $P_{(p,p')} := K(p', \varepsilon) \cap L$ povezani enodimenzionalni podmnogoterosti L z robom, ki ne vsebujeta praslike nobene druge dvojne točke projekcije φ kot p oziroma p' , pri čemer je $K(x, r)$ odprta krogla v $\mathbb{R}^3$ s središčem v točki $x \in \mathbb{R}^3$ in polmerom $r \in \mathbb{R}$. Nazadnje, naj bosta

$$N = \bigcup_{(p,p') \in D} N_{(p,p')} \subset L \quad \text{in} \quad P = \bigcup_{(p,p') \in D} P_{(p,p')} \subset L.$$

Za φ in vsak $(p, p') \in D$ potem definiramo:

- dvojna točka $\varphi(p) = \varphi(p')$ projekcije φ je **križišče**,
- slika $\varphi(N_{(p,p')})$ okolice $N_{(p,p')} \subset L$ točke p je **nadvoz**,
- slika $\varphi(P_{(p,p')})$ okolice $P_{(p,p')} \subset L$ točke p' je **podvoz**,
- slika preslikave $\varphi|_{L-P}$ je **diagram spleta L** glede na regularno projekcijo φ ,
- komponentam za povezanost diagrama $\varphi|_{L-P}$ pravimo **loki**.

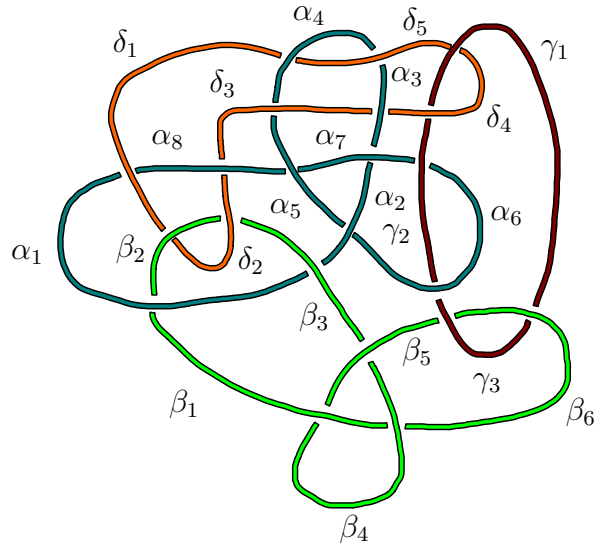
Diagram spleta je torej slika regularne projekcije, na kateri smo izpustili slike podvozov na vsakem križišču (dvojni točki). S tem smo zabeležili dodatne informacije, ki nam omogočajo rekonstrukcijo spleta (oziroma spleta, ki je ambientno izotopen prvotnemu spletu) iz diagrama. Na sliki 9 lahko vidimo, kako posamezno križišče izgleda na diagramu.



Slika 9: Diagram križišča σ , v katerem se loka α_1 in α_3 končata v podvozu, lok α_2 pa vsebuje nadvoz.

Primer 1.15. Primeri 1.2, 1.2, 1.4 in 1.5 v resnici predstavljajo diagrame omenjenih spletov, primera 1.11 in 1.12 pa ne, saj vozla nista krotka in diagrama za njiju ne obstajata. $\diamond$

Primer 1.16. Na sliki 10 lahko vidimo diagram spleta z označenimi loki $\alpha_1, \dots, \alpha_8$, ki sestavljajo prvo komponento, loki $\beta_1, \dots, \beta_6$, ki sestavljajo drugo komponento, loki $\gamma_1, \dots, \gamma_3$, ki sestavljajo tretjo komponento, in loki $\delta_1, \dots, \delta_5$, ki sestavljajo zadnjo komponento.

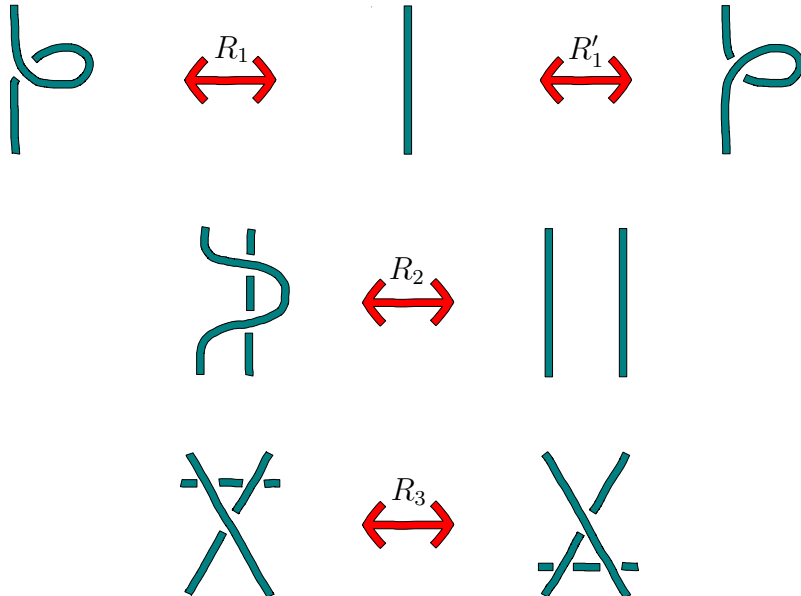


Slika 10: Diagram 4-spleta.

◇

Omembe vredno je, da regularne projekcije (in posledično diagrami) spleta v $\mathbb{R}^3$ vedno obstajajo. Torej lahko vsak spleť predstavimo z diagramom. Ti se v kontekstu naslednje definicije in trditve izkažejo za posebej uporaben prikaz spleta.

Definicija 1.17 (Reidemeistrove poteze). Na diagramih spletov definiramo tri **Reidemeistrove poteze** (slika 11):

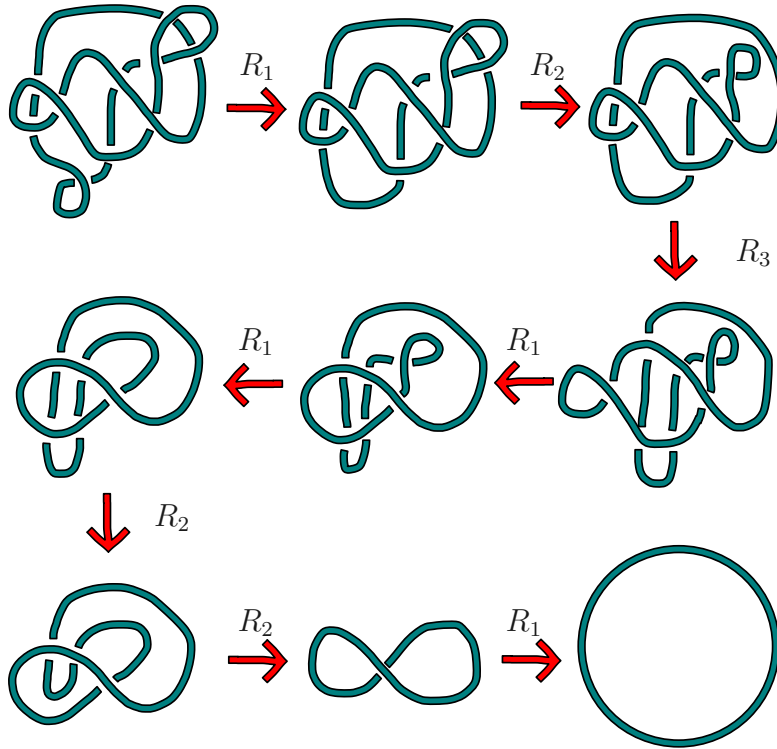


Slika 11: Reidemeistrove poteze.

Trditev 1.18. Dva krotka spleta v $\mathbb{R}^3$ sta ambientno izotopna natanko tedaj, ko sta njuna diagrama povezana s končnim zaporedjem Reidemeistrovih potez in ravninskih ambientnih izotopij.

Diagrami torej zajamejo vse informacije o spletih. Reidemeistrove poteze nam relativno kompleksen pojem ambientne izotopije nadomestijo z zaporedjem preprostih potez na diagramih. Če se vrnemo na primer 1.7 od prej, lahko sedaj res dokažemo, da sta vozla ambientno izotopna.

Primer 1.19. Slika 12 nam poda zaporedje Reidemeistrovih potez, ki preveri ambientno izotopijo med vozla iz primera 1.7.



Slika 12: Zaporedje Reidemeistrovih potez med vozla iz primera 1.7.

◇

Naivno bi bilo misliti, da je zaporedje Reidemeistrovih potez med diagramoma ambientno izotopnih spletno vedno lahko poiskati. Izkaže se, da so nekateri pari diagramov povezani le z zaporedjem potez, ki za nekaj korakov poveča število križišč. Potem ne moremo vedno le poiskati poteze, ki zmanjša (ali ohranja) števila križišč, kar vodi v ogromno število možnih potez, ki jih lahko naredimo na vsakem danem koraku. V splošnem ne obstaja algoritem, ki bi preveril, ali sta dva diagrama povezana z zaporedjem Reidemeistrovih potez.

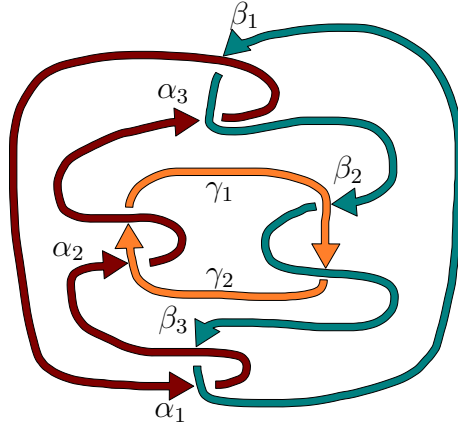
1.4 Orientirani spleti

Do sedaj smo obravnavali splete kot vložitve neorientirane disjunktne unije krožnic. Če krožnicam dodelimo orientacijo, dobimo orientiran splet:

Definicija 1.20 (Orientacija spleta). **Orientacija** spleta L je določena z orientacijo vsake njegove komponente.

Opazimo, da ima n -splet natanko 2^n možnih orientacij, saj ima vsaka komponenta dve možni orientaciji. Kot pri neorientiranih spletih lahko za orientirane splete definiramo ambientno izotopijo, ki mora zvezno ohranjati orientacijo vsake od komponent spleta. Podobno kot v razdelkih 1.2 in 1.3 lahko definiramo krotke orientirane splete ter diagrame orientiranih krotkih spletov.

Primer 1.21. Na sliki 13 lahko vidimo diagram nekega orientiranega spleta.



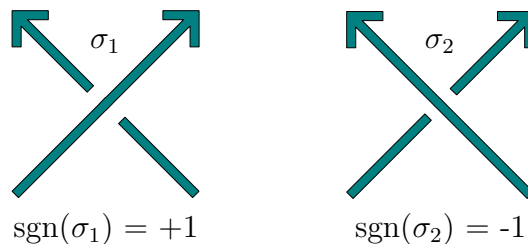
Slika 13: Diagram orientiranega 3-spleta.

◇

Omenimo, da v splošnem orientiran splet ni izotopen orientiranemu spletu, ki ga dobimo, če kateri od komponent zamenjamo orientacijo. Orientiranemu vozlu, ki je ambientno izotopen samemu sebi z nasprotno orientacijo, pravimo akiralni vozle, ostalim vozlom pa kiralni vozli. Deteljica iz primera 1.5 je zgled kiralnega vozla, nevozel iz primera 1.2 pa zgled akiralnega vozla.

Veliko konstrukcij, ki jih bomo spoznali, obstaja le za orientirane splete. Od sedaj naprej bomo predpostavili, da so vsi spleti orientirani, četudi tega ne bomo izrecno omenili. Za konec razdelka si oglejmo pomembno dodatno informacijo, ki jo lahko pripišemo križiščem na diagramih orientiranih spletov.

Definicija 1.22 (Predznak križišča). Naj bo σ križišče na diagramu orientiranega spleta L . Definiramo **predznak križišča** $\text{sgn}(\sigma)$, ki ga določimo s primerjavo križišča s križiščema na sliki 14:



Slika 14: Predznak križišča σ .

1.5 Spletno število

Kot smo omenili na začetku poglavja, je spletno število najstarejša invarianta sple-
tov. Definiramo ga lahko na mnogo različnih načinov. Gauss ga je prvotno definirал
kot dvojni integral, ki vsebuje parametrizaciji dveh enostavnih sklenjenih krivulj v
prostoru. Pogosta definicija je tudi presečno število ene komponente spleta s Seifer-
tovo ploskvijo druge komponente spleta. Za nas pa bo posebej uporabna naslednja
formulacija:

Definicija 1.23 (Spletno število). Naj bo $L = L_1 \cup L_2$ 2-splet v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ (oziroma $\mathbb{S}^3$). Naj bo $[l]$ tisti homološki razred v $H_1(\mathbb{R}^3 - L_2) = \langle m \rangle \cong \mathbb{Z}$, v katerem je L_1 . Potem je $[l] = k[m]$ za neko celo število k . Definiramo **spletno število** $lk(L) = lk(L_1, L_2) := k$.

Opomba: spletno število je globalno definirano le za splete v evklidskem prostoru. Kljub temu lahko spletno število definiramo tudi za splet v evklidski okolici znotraj poljubne tridimenzionalne mnogoterosti, tako da izračunamo spletno število spleta, ki ga dobimo s homeomorfizmom, ki ga določa evklidska okolica.

Trditev 1.24. *Spletno število je invarianta za ambientno izotopijo.*

Preden se posvetimo primerom, si oglejmo še dve pomembni lastnosti spletnega števila ter učinkovit način za izračun spletnega števila iz diagrama spleta.

Trditev 1.25. *Za 2-splet $L = L_1 \cup L_2$ v evklidskem prostoru velja:*

1. $lk(L_1, L_2) = lk(L_2, L_1)$
2. *Menjava orientacije ene od komponent spremeni predznak spletnemu številu.*

Trditev 1.26. *Za 2-splet $L = L_1 \cup L_2$ v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ in nek diagram tega spleta velja*

$$lk(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in S} sgn(\sigma),$$

kjer je S množica vseh križišč med L_1 in L_2 na izbranem diagramu, oziroma, za $i \neq j$:

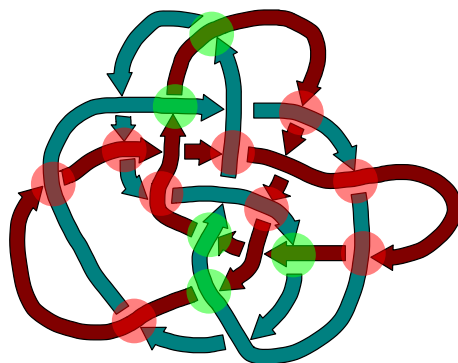
$$lk(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \left(\left| \left\{ \begin{array}{c} L_i \quad L_j \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \right\} \right| - \left| \left\{ \begin{array}{c} L_i \quad L_j \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \right\} \right| \right)$$

Spletno število velja za preprosto, vendar močno invarianto pri preučevanju sple-
tov. Seveda jo lahko definiramo tudi med izbranimi komponentama spleta s poljub-
nim številom komponent. Tako za n -splet dobimo $\frac{n(n-1)}{2}$ spletnih števil. Kljub temu
hitro naletimo na primere, kjer nam spletno število ni v pomoč. Oglejmo si primer,
kjer lahko na podlagi spletnega števila sklepamo, da splet ni trivialen, potem pa še
nekaj primerov, kjer se spletno število izkaže za prešibko invarianto.

Primer 1.27. Spodaj je prikazan (slika 15) diagram orientiranega 2-spleta L z označenimi predznaki križišč. Potem lahko z uporabo trditve 1.26 izračunamo njegovo spletno število:

$$\text{lk}(L) = \frac{1}{2}(5 - 9) = -2.$$

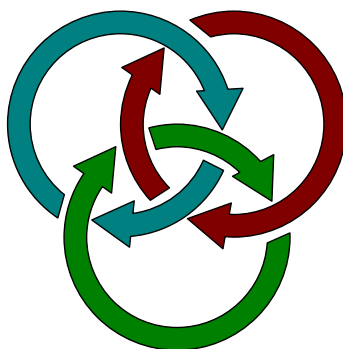
Jasno je, da je spletno število trivialnega 2-spleta enako 0 (lahko ga izračunamo iz diagrama, podanega v primeru 1.3). Potem lahko zaključimo, da splet na sliki 15 ni trivialen.



Slika 15: Orientiran 2-splet z označenimi predznaki križišč.

◇

Primer 1.28. Splet s tremi komponentami na sliki 16 imenujemo Boromejski obroči. Ima zanimivo lastnost, da je spletno število vsakih dveh komponent enako 0. Če v glavi odmislimo katerokoli od treh komponent, lahko preostali dve ločimo. Vseeno se zdi malo verjetno, da je splet trivialen. Zdi se, kot da obstaja neka medsebojna trikomponentna prepletenost, ki je spletno število ne zazna.

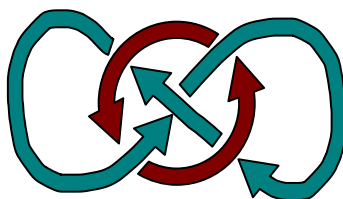


Slika 16: Boromejski obroči.

◇

Primer 1.29. Splet na sliki 17 je znan kot Whiteheadov splet, poimenovan po znamenitem matematiku J. H. C. Whiteheadu, po katerem se imenuje tudi pomemben izrek o (šibki) homotopski ekvivalenci med CW kompleksi. Whitehead je uporabil ta splet v definiciji Whiteheadove mnogoterosti, s katero se je ukvarjal med obravnavanjem Poincaréjeve domneve. Ima zanimivo lastnost, da ima spletno število enako 0,

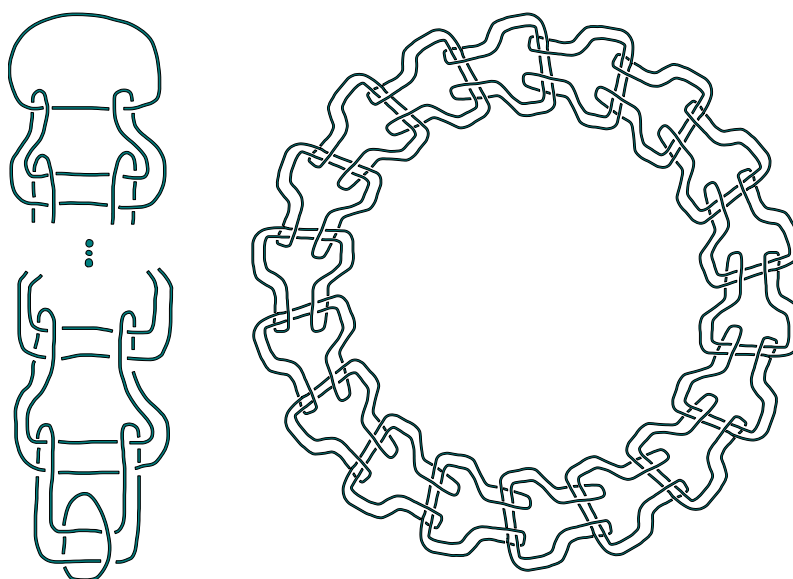
vendar se zdi, da ni ambientno izotopen trivialnemu spletu. S tem služi kot primer dejstva, da spletno število ne zazna vse prepletenosti, tudi med 2-spleti.



Slika 17: Whiteheadov splet.

◇

Primer 1.30. Na sliki 18 lahko vidimo še dva primera spletov, za katera so vsa spletna števila med pari komponent enaka 0, čeprav spleta nista trivialna. Prvi ima poljubno število komponent, drugi pa jih ima 18. Z Boromejskimi obroči (primer 1.28) si delita tudi lastnost, da postaneta trivialna, če odstranimo katerokoli njuno komponento. Takim spletom pravimo Brunnijski spleti, po matematiku Karlu Hermannu Brunnju.



Slika 18: Dva Brunnijška spleta.

◇

1.6 Fundamentalna grupa

Za konec poglavja si oglejmo še eno ključno invarianto vozlov in spletov: fundamentalno grupo. Ker je vsak vozlel K homeomorfen krožnici, je $\pi_1(K) = \mathbb{Z}$ ne glede na izbiro vozla. Opazimo torej, da je za razlike med posameznimi vozli ključna vložitev krožnice v ambientni prostor. Fundamentalno grupo vozla (oz. spleta) potem definiramo kot fundamentalno grupo komplementa slike te vložitve.

Definicija 1.31 (Fundamentalna grupa spleta). Naj bo L splet v mnogoterosti M . **Fundamentalna grupa spleta**, označena z $G(M - L)$, je fundamentalna grupa $\pi_1(M - L, x_0)$, kjer je x_0 točka v $M - L$.

Opomba: ker je prostor $M - L$ povezan, je fundamentalna grupa neodvisno od izbire točke x_0 do izomorfizma natančno dobro definirana.

Trditev 1.32. *Fundamentalna grupa spleta je invarianta za ambientno izotopijo.*

Znan rezultat iz teorije vozlov pravi, da je vsak vozel v $\mathbb{R}^3$ natanko določen s svojim komplementom. Za splete podobna trditev ne velja: obstajajo spleti v $\mathbb{R}^3$, ki niso ambientno izotopni, vendar imajo homeomorfne komplemente ([13, stran 49, primer 2]). Vseeno fundamentalna grupa spleta ostaja močna invarianta. Za splete v $\mathbb{R}^3$ imamo zanjo precej lepo predstavitev, ki nam močno olajša računanje:

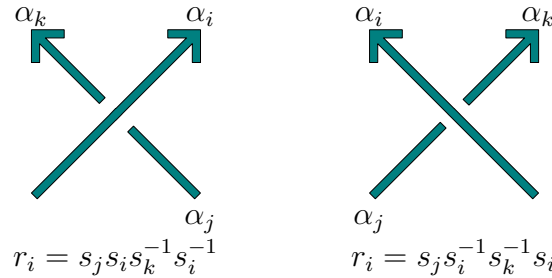
Izrek 1.33 (Wirtingerjeva prezentacija). *Naj bo L splet v $\mathbb{R}^3$, naj bo p regularna projekcija spleta L in naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ loki in $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ križišča na diagramu, ki ga določa projekcija p . Potem imamo za fundamentalno grupo $G(\mathbb{R}^3 - L)$ predstavitev*

$$G(\mathbb{R}^3 - L) = \left\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_n \right\rangle,$$

kjer je za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ s_i zanka okoli praslike loka $p^{-1}(\alpha_i)$ s spletnim številom $lk(s_i, p^{-1}(\alpha_i)) = +1$ in

$$r_i = s_j s_i^{\text{sgn}(\sigma_i)} s_k^{-1} s_i^{-\text{sgn}(\sigma_i)},$$

kjer v križišču σ_i lok α_j gre pod lokom α_i in postane lok α_k (slika 19).



Slika 19: Relacije Wirtingerjeve prezentacije.

Oglejmo si nekaj preprostih primerov.

Primer 1.34. Ponovno si oglejmo nevozel iz primera 1.2. Diagram ima le en lok in nobenega križišča. Wirtingerjeva prezentacija nam potem pove, da je fundamentalna grupa nevozla ravno prosta grupa z enim generatorjem $F = \langle s \rangle$. $\diamond$

Primer 1.35. Naj bo L n -splet v $\mathbb{R}^3$, ki ga lahko zapišemo kot disjunktno unijo dveh spletov L' in L'' . Naj obstajata disjunktni zaprti množici $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^3$, ki sta homeomorfni 3-krogli $\mathbb{B}^3$, tako da je $L' \subset B_1$ in $L'' \subset B_2$. Potem je

$$\mathbb{R}^3 - L = ((\mathbb{R}^3 - L) - (B_1 - L')) \cup ((\mathbb{R}^3 - L) - (B_2 - L'')),$$

kjer sta $(\mathbb{R}^3 - L) - (B_1 - L')$ in $(\mathbb{R}^3 - L) - (B_2 - L'')$ odprti množici, njun presek

$$((\mathbb{R}^3 - L) - (B_1 - L')) \cap ((\mathbb{R}^3 - L) - (B_2 - L'')) = \mathbb{R}^3 - (B_1 \cup B_2)$$

pa je enostavno povezan. Če uporabimo Seifert-van-Kampenov izrek, dobimo

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R}^3 - L) &= \pi_1(\mathbb{R}^3 - L) = \pi_1((\mathbb{R}^3 - L) - (B_1 - L')) * \pi_1((\mathbb{R}^3 - L) - (B_2 - L'')) \cong \\ &\cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - L'' - \{\bullet\}) * \pi_1(\mathbb{R}^3 - L' - \{\bullet\}) \cong \\ &\cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - L'') * \pi_1(\mathbb{R}^3 - L') \\ &\cong G(\mathbb{R}^3 - L') * G(\mathbb{R}^3 - L''). \end{aligned}$$

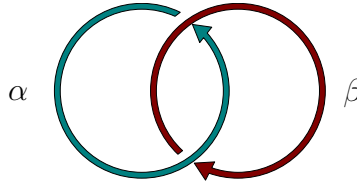
Posebej, fundamentalna grupa trivialnega n -spleta v $\mathbb{R}^3$ je prosta grupa na n generatorjih, saj lahko vse komponente ločimo, fundamentalna grupa vsake pa je prosta grupa z enim generatorjem (primer 1.35).

Opomba: enak zaključek lahko dobimo z uporabo Wirtingerjeve prezentacije za diagram spleta L , ki ga lahko zapišemo kot disjunktno unijo dveh spletov L' in L'' , kjer nobena komponenta spleta L' nima križišča z nobeno komponento spleta L'' . $\diamond$

Primer 1.36. Naj bo L Hopfov splet v $\mathbb{R}^3$ z diagramom na sliki 20. Dobimo Wirtingerjevo prezentacijo

$$\langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] \rangle \cong \mathbb{Z}^2,$$

ki nam pove, da je fundamentalna grupa Hopfovega spleta ravno prosta Abelova grupa na dveh generatorjih. Ker vemo, da je fundamentalna grupa trivialnega 2-spleta ravno prosta nekomutativna grupa na dveh generatorjih (primer 1.35), lahko zaključimo, da Hopfov splet ni trivialen.

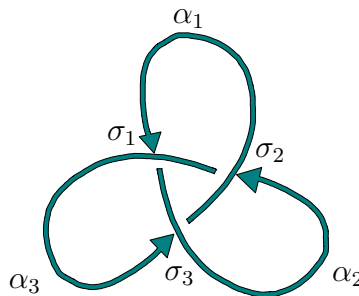


Slika 20: Diagram Hopfovega spleta.

$\diamond$

Primer 1.37. Vzemimo diagram deteljice iz slike 21. Na njem označimo loke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in križišča $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Wirtingerjeva prezentacija nam za dani diagram da prezentacijo fundamentalne grupe vozla

$$G(\mathbb{R}^3 - L) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \sigma_1 : \alpha_1\alpha_3\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}, \quad \sigma_2 : \alpha_2\alpha_1\alpha_3^{-1}\alpha_1^{-1}, \quad \sigma_3 : \alpha_3\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \rangle.$$



Slika 21: Diagram deteljice z označenimi loki in križišči.

Z relacijo σ_3 lahko izrazimo $\alpha_3 = \alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}$. Dobimo

$$G(\mathbb{R}^3 - L) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \mid \alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}, \quad \alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1} \rangle$$

in opazimo, da je druga relacije le inverz prve, tako da jo lahko izpustimo. Vzemimo $x = \alpha_1\alpha_2$ in $y = \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$. Potem lahko izrazimo $\alpha_1 = x^2y$, $\alpha_2 = (xy)^{-1}$ in

$$1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} = \alpha_1\alpha_2\alpha_1(\alpha_2\alpha_1\alpha_2\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1})\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} = x^3y^2.$$

Torej je

$$G(\mathbb{R}^3 - L) = \langle x, y \mid x^3y^2 \rangle.$$

Z nekaj znanja teorije grup lahko pokažemo, da ta grupa ni komutativna. Sledi zaključek, da deteljica ni ambientno izotopna nevozlu. ◇

Kljub preprostosti Wirtingerjeve prezentacije je v splošnem težko ugotoviti, kdaj fundamentalni grupi dveh spleto sta ali nista izomorfni. Iz teorije grup vemo, da ne obstaja (in ne more obstajati) algoritem, ki bi to preveril. Za zaključek poglavja si pogledjmo še eno pomembno lastnost Wirtingerjeve prezentacije.

Trditev 1.38. *Naj bo L splet v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$, $s_1, \dots, s_n$ generatorji in $r_1, \dots, r_n$ relacije Wirtingerjeve prezentacije grupe $G(\mathbb{R}^3 - L)$, določene z nekim diagramom. Potem obstajajo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ v prosti grupi $\langle s_1, \dots, s_n \rangle$, da v izbrani Wirtingerjevi prezentaciji grupe $G(\mathbb{R}^3 - L)$ velja*

$$\prod_{i=1}^n r_i^{\lambda_i} = 1.$$

Potem je vsaka relacija v Wirtingerjevi prezentaciji posledica ostalih relacij.

2 Predal z algebraičnim orodjem

V tem poglavju bomo vpeljali dve pomembni algebraični konstrukciji, ki nam bosta prišli prav kasneje. Prva je razširitev proste grupe, način predstavitve proste grupe kot podgrupe za množenje v algebri formalnih potenčnih vrst. Druga je spodnje centralno zaporedje grupe, zaporedje podgrup edink, ki vsebuje zanimive strukturne lastnosti grupe ter je tesno povezano s prostimi Lijevimi algebrami. Poglobljeno obravnavo teh tematik lahko najdemo v učbeniku »Combinatorial group theory« [9].

2.1 Razširitve prostih grup

V splošnem je razširitev proste grupe način predstavitve proste grupe kot podgrupe za množenje v algebri formalnih potenčnih vrst z nekomutativnimi spremenljivkami.

Definicija 2.1 (Razširitev $F_n \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$). Naj bo F_n prosto generirana grupa z n generatorji $x_1, \dots, x_n$ in $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ nekomutativna algebra formalnih potenčnih vrst z n generatorji $X_1, \dots, X_n$. **Razširitev iz F_n v**

$\mathbb{Z}\langle\langle \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \rangle\rangle$ je monomorfizem $J : F_n \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ v multiplikativno grupo algebre $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$, tako da za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ velja

$$J(x_i) = 1 + X_i + \text{multinomi višje stopnje.}$$

Opomba: množica $J(F_n)$ ni podkolobar $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$, saj ne vsebuje enote za seštevanje 0.

V naslednjem izreku spoznamo razširitev, ki jo bomo uporabljali.

Izrek 2.2 (Magnusova razširitev [9]). *Preslikava*

$$\begin{aligned} M : F_n &\hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle \\ x_i &\mapsto 1 + X_i \end{aligned}$$

je razširitev in $M(x_i)^{-1} = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \dots$.

Dokaz izreka 2.2. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} (1 + X_i)(1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \dots) &= \\ &= (1 - X_i + X_i^2 - \dots + (-1)^n X_i^n + \dots) \\ &\quad + (X_i - X_i^2 + \dots + (-1)^{n+1} X_i^{n+1} + \dots) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Prav tako opazimo, da je množica elementov v $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ s prostim členom 1 grupa za množenje, saj je prosti člen produkta enak produktu prostih členov. Potem je naša preslikava dobro definiran homomorfizem iz proste grupe v to grupo.

Pokazati moramo še, da je injektivna. Naj bo $x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_m}^{k_m} \in F_n$ neprazna okrajšana beseda. Opazimo, da vrsta $M(x_{i_j}^{k_j})$ vsebuje člen $k_j X_{i_j}$ (lahko dokažemo s preprosto indukcijo na $|k_j|$). Potem vrsta $M(x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_m}^{k_m})$ vsebuje člen $k_1 X_{i_1} \dots k_m X_{i_m}$ in torej ni enaka 1. Torej je v jedru preslikave res le prazna beseda in je naša preslikava monomorfizem. □

Magnusova razširitev je preprost, a uporaben način dojemanja proste grupe v algebri nekomutativnih formalnih potenčnih vrst. Poglejmo si nekaj razširitev poljubnih elementov.

Primer 2.3. Naj bo $F = \langle x_1, x_2 \rangle$ prosta grupa z dvema generatorjema. Potem je

$$\begin{aligned} M(x_1 x_2) &= (1 + X_1)(1 + X_2) = 1 + X_1 + X_2 + X_1 X_2, \\ M(x_1 x_2^{-1}) &= (1 + X_1)(1 - X_2 + X_2^2 - X_2^3 \pm \dots) = \\ &= 1 + X_1 - X_2 - X_1 X_2 + X_2^2 \pm \dots, \\ M(x_2^{-1} x_1^{-1}) &= (1 - X_2 + X_2^2 \pm \dots)(1 - X_1 + X_1^2 \pm \dots) = \\ &= 1 - X_1 - X_2 + X_1^2 + X_2 X_1 + X_2^2 \pm \dots, \\ M(x_1 x_2 x_1) &= (1 + X_1)(1 + X_2)(1 + X_1) = \\ &= 1 + 2X_1 + X_2 + X_1 X_2 + X_2 X_1 + X_1^2 + X_1 X_2 X_1. \end{aligned}$$

◇

Ena od lepih lastnosti Magnusove razširitve je tudi tesna povezanost s kombinatorično konstrukcijo mešanja, ki jo bomo sedaj obravnavali.

Definicija 2.4 (Mešanje zaporedij). Naj bosta I in J končni zaporedji naravnih števil. Definiramo:

- Končno zaporedje naravnih števil H je **rezultat mešanja zaporedij I in J** , če vsebuje I in J kot podzaporedji in ne vsebuje nobenega člena, ki ni člen I ali J . Za rezultat H mešanja zaporedij I in J je **mešanje zaporedij I in J** indeksiranje podzaporedij I in J v zaporedju H (torej zaporedje H , opremljeno z dodatno informacijo, kateri elementi pripadajo I in/ali J). Množico vseh mešanj zaporedij I in J označimo s $S(I, J)$. Omenimo, da je lahko neko zaporedje H rezultat mešanja zaporedij I in J na več kot en način in se v $S(I, J)$ pojavi večkrat z različnimi indeksiranjem.
- Končno zaporedje naravnih števil H je **rezultat pravega mešanja zaporedij I in J** , če vsebuje I in J kot disjunktni podzaporedji in ne vsebuje nobenega člena, ki ni člen I ali J . Za rezultat H pravega mešanja zaporedij I in J je **pravo mešanje zaporedij I in J** indeksiranje podzaporedij I in J v zaporedju H (torej zaporedje H , opremljeno z dodatno informacijo, kateri elementi pripadajo I in kateri J). Množico vseh pravih mešanj zaporedij I in J označimo s $PS(I, J)$. Kot prej je lahko neko zaporedje H rezultat pravega mešanja zaporedij I in J na več kot en način in se v $PS(I, J)$ pojavi večkrat z različnimi indeksiranjem.

Sama definicija nam ne poda intuitivnega razumevanja (pravega) mešanja zaporedij. V ta namen si pogledjmo ilustrativen primer.

Primer 2.5. Naj bosta $I = 112$ in $J = 12$ zaporedji elementov množice $\{1, 2\}$. V rezultatih (pravega) mešanja zaporedij I in J bomo s črtami nad številkami prikazali pripadnost podzaporedju, enakemu I , in s črtami pod številkami prikazali pripadnost podzaporedju, enakemu J . Potem je

$$\begin{aligned} S(I, J) &= \{\bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \\ &\quad \bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}\}, \\ PS(I, J) &= \{\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}, \bar{1}\bar{1}\bar{2}\bar{1}\bar{2}\}. \end{aligned}$$

◇

Med koeficienti formalnih potenčnih vrst, ki nastopijo v sliki Magnusove razširitve, velja posebej lepa relacija, ki jo lahko izrazimo z mešanjem zaporedij indeksov.

Izrek 2.6 ([4]). Naj bo w beseda v prosti grupi F_n in naj bo

$$M(w) = 1 + \sum_{i_1 \dots i_p} \Lambda(i_1 \dots i_p) X_{i_1} \dots X_{i_p}$$

njena Magnusova razširitev, kjer $\Lambda(i_1 \dots i_p)$ označuje celoštevilski koeficient pred monomom $X_{i_1} \dots X_{i_p}$. Potem za zaporedji I in J števil $1, \dots, n$ velja

$$\Lambda(I)\Lambda(J) = \sum_{H \in S(I, J)} \Lambda(H).$$

Dokaz izreka 2.6. Izrek dokažemo z indukcijo na dolžino $|w|$ besede w .

Če je $|w| = 1$, potem je $w = x_i$ ali $w = x_i^{-1}$ za nek generator x_i grupe F . Za $w = x_i$ je $M(w) = 1 + X_i$ in je edini neničeln koeficient $\Lambda(i)$. Potem imamo le eno kombinacijo I in J , za katero obstaja $H \in S(I, J)$ z neničelnim koeficientom $\Lambda(H)$, to je $I = J = H = \{i\}$. V tem primeru izrek očitno velja.

Za $w = x_i^{-1}$ je $M(w) = 1 - X_i + X_i^2 - \dots$ in je $\Lambda(I) \neq 0$ natanko tedaj, ko je $I = i^k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Za $I = i^k$ in $J = i^l$ je potem $\Lambda(I)\Lambda(J) = (-1)^k(-1)^l = (-1)^{k+l}$. Naj bo $(k, l)_t$ število mešanj i^k in i^l dolžine t . To so ravno tista mešanja, katerih rezultat je zaporedje i^t . Z indukcijo na število l pokažimo

$$\sum_{t=\max(k,l)}^{k+l} (-1)^t (k, l)_t = (-1)^{k+l}. \quad (2.1)$$

Za $l = 1$ imamo $(k, 1)_k = k$ in $(k, 1)_{k+1} = k + 1$. Potem je

$$(-1)^k k + (-1)^{k+1} (k + 1) = (-1)^{k+1}.$$

Predpostavimo sedaj, da za poljubna $k \in \mathbb{N}$ in $l \in \mathbb{N}$ enačba 2.1 drži za k in $l - 1$, ter pokažimo, da potem drži tudi za l . Opazimo, da je

$$S(i^k, i^{l-1}) \cup S(i^k, i^l) = S(i^k, S(i, i^{l-1})) = S(S(i^k, i), i^{l-1})$$

in da se zaporedje i^{l-1} v $S(i, i^{l-1})$ pojavi z $(l - 1)$ različnimi indeksiranjem, zaporedje i^l pa se pojavi z l različnimi indeksiranjem. Podobno velja tudi za zaporedji i^{k-1} in i^k . Potem je

$$\begin{aligned} & l \left(\sum_{t=\max(k,l)}^{k+l} (-1)^t (k, l)_t \right) + (l - 1) \left(\sum_{t=\max(k,l-1)}^{k+l-1} (-1)^t (k, l - 1)_t \right) = \\ & = l \left(\sum_{H \in S(i^k, i^l)} (-1)^{|H|} \right) + (l - 1) \left(\sum_{H \in S(i^k, i^{l-1})} (-1)^{|H|} \right) = \\ & = \sum_{H \in S(i^k, S(i, i^{l-1}))} (-1)^{|H|} = \sum_{H \in S(S(i^k, i), i^{l-1})} (-1)^{|H|} = \\ & = k \left(\sum_{H \in S(i^k, i^{l-1})} (-1)^{|H|} \right) + (k + 1) \left(\sum_{H \in S(i^{k+1}, i^{l-1})} (-1)^{|H|} \right) = \\ & k \left(\sum_{t=\max(k,l-1)}^{k+l-1} (-1)^t (k, l - 1)_t \right) + (k + 1) \left(\sum_{t=\max(k+1,l-1)}^{(k+1)+(l-1)} (-1)^t (k + 1, l - 1)_t \right) \end{aligned}$$

Z uporabo induksijske predpostavke dobimo

$$\begin{aligned} \left(\sum_{t=\max(k,l)}^{k+l} (-1)^t (k, l)_t \right) &= \frac{(-1)^{k+l-1} \left(k + (-1)(k + 1) + (-1)(l - 1) \right)}{l} = \\ &= \frac{(-1)^{k+l-1} (-l)}{l} \\ &= (-1)^{k+l}. \end{aligned}$$

Potem izrek drži za besede w dolžine 1.

Sedaj vzemimo poljuben $k \in \mathbb{N}$ in predpostavimo, da izrek drži za besede, katerih dolžina je manjša od k . Naj bo za poljubno naravno število i in poljubno končno zaporedje naravnih števil H , $H|_i$ podzaporedje prvih i členov zaporedja H in $H|^i$ podzaporedje vseh preostalih členov zaporedja H . Besedo w lahko zapišemo kot netrivialen produkt krajših besed $w = uv$ in gledamo koeficiente v Magnusovih razširitvah Λ_w , Λ_u in Λ_v teh treh besed. Z uporabo indukcijske predpostavke izračunamo

$$\begin{aligned}
\Lambda_w(I)\Lambda_w(J) &= \left(\sum_{r=0}^{|I|} \Lambda_u(I|_r)\Lambda_v(I|^r) \right) \left(\sum_{s=0}^{|J|} \Lambda_u(J|_s)\Lambda_v(J|^s) \right) = \\
&= \sum_{r,s} \Lambda_u(I|_r)\Lambda_u(J|_s)\Lambda_v(I|^r)\Lambda_v(J|^s) = \\
&= \sum_{r,s} \left(\sum_{H_u \in S(I|_r, J|_s)} \Lambda_u(H_u) \right) \left(\sum_{H_v \in S(I|^r, J|^s)} \Lambda_v(H_v) \right) = \\
&= \sum_{H_w \in S(I, J)} \sum_{t=0}^{|I|+|J|} \Lambda_u(H_w|_t)\Lambda_v(H_w|^t) = \\
&= \sum_{H_w \in S(I, J)} \Lambda_w(H_w).
\end{aligned}$$

S tem je naš izrek dokazan. $\square$

Kratek uvod v razširitve zaključimo z zanimivim rezultatom, da je izbira razširitve poljubna do avtomorfizma algebre formalnih potenčnih vrst z nekomutativnimi spremenljivkami. Magnusova razširitev za nas ostaja posebej prikladna zaradi kombinatoričnega rezultata iz izreka 2.6 in dejstva, da so celoštevilski koeficienti posebej praktični za uporabo in interpretacijo.

Trditev 2.7 ([8]). *Za vsaki dve razširitvi*

$$J_1, J_2 : F_n \hookrightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$$

obstaja enolično določen avtomorfizem $\Phi : \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$, da velja $J_2 = \Phi \circ J_1$.

Dokaz trditve 2.7. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je J_1 Magnusova razširitev M . Potem definiramo

$$\Phi(X_i) = J_2(x_i) - 1.$$

Opazimo, da je $J_2 = \Phi \circ M$. Iz

$$J_2(x_i) = 1 + X_i + \sum_{j_1 \dots j_m} K_{i, j_1 \dots j_m} X_{j_1} \dots X_{j_m}$$

sledi

$$\Phi(X_i) = X_i + \sum_{j_1 \dots j_m} K_{i, j_1 \dots j_m} X_{j_1} \dots X_{j_m}.$$

Potem lahko X_i razumemo kot formalno potenčno vrsto v $\mathbb{Z}\langle\langle \Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n) \rangle\rangle$ in definiramo endomorfizem $\Phi^{-1}(\Phi(X_i)) = X_i$. Iz $\Phi^{-1} \circ \Phi = \text{id}$ sledi, da je Φ^{-1}

surjektiven, iz $\Phi^{-1}(X_i) = X_i + \dots$ pa sledi, da je Φ^{-1} injektiven (kot v dokazu izreka 2.1). Potem je Φ^{-1} avtomorfizem in posledično je tudi Φ avtomorfizem. Njegova enoličnost izhaja iz njegove definicije. □

2.2 Spodnje centralno zaporedje

Oglejmo si naslednje zaporedje podgrup edink, ki ga lahko definiramo za poljubno grupo G .

Definicija 2.8 (Spodnje centralno zaporedje). Za grupo G definiramo **spodnje centralno zaporedje**

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots,$$

kjer je $G_1 := G$ in $G_{n+1} := [G, G_n] = \{a^{-1}b^{-1}ab \mid a \in G, b \in G_n\}$.

Zaporedje se izkaže za pomembno konstrukcijo v teoriji grup in neasociativni algebri. Nas bodo zanimala predvsem spodnja centralna zaporedja fundamentalnih grup spleto. Preden si ogledamo nekaj primerov, dokažimo še naslednji izrek, ki nam da uvid v Magnusovo razširitev spodnjega centralnega zaporedja.

Izrek 2.9 ([9]). *Naj bo F prosta grupa na n generatorjih, $M(F)$ njena Magnusova razširitev in F_q element njenega spodnjega centralnega zaporedja za $q \in \mathbb{N}$. Naj bo $D_n(F) \subset M(F)$ množica vseh formalnih potenčnih vrst s prostim členom enakim 1 in ostalimi monomi stopnje $\geq n$. Potem je*

- množica $D_n(F)$ podgrupa $M(F)$,
- kvocient $\frac{D_n(F)}{D_{n+1}(F)}$ končno generirana prosta Abelova grupa in
- slika $M(F_q)$ vsebovana v $D_q(F)$.

Dokaz izreka 2.9. Naj bodo F , $M(F)$, F_q in $D_n(F)$ kot v izreku. Jasno je, da je $D_n(F)$ podgrupa $M(F)$. Vsak element $C_n \in D_n(F)$ lahko zapišemo kot

$$C_n = 1 + P_n(X_1, \dots, X_n) + h_{n+1}(X_1, \dots, X_n),$$

kjer je $P_n(X_1, \dots, X_n)$ homogen multinom stopnje n in $h_{n+1}(X_1, \dots, X_n)$ vrsta monomov stopnje $\geq n+1$. Naj bo H_n aditivna grupa homogenih multinomov stopnje n v nekomutativnih spremenljivkah $X_1, \dots, X_n$ s celoštevilskimi koeficienti. Potem lahko definiramo homomorfizem

$$\begin{aligned} \varphi : D_n(F) &\rightarrow H_n \\ C_n &\mapsto P_n(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Preslikava φ je res homomorfizem, saj je

$$C_n C'_n = 1 + P_n + P'_n + \text{monomi višje stopnje}$$

in je torej

$$\varphi(C_n C'_n) = P_n + P'_n = \varphi(C_n) + \varphi(C'_n).$$

Opazimo še več, da je φ epimorfizem, njeno jedro pa je $D_{n+1}(F)$. Potem je

$$\frac{D_n(F)}{D_{n+1}(F)} \cong H_n.$$

Ker je H_n končno generirana prosta Abelova grupa, smo s tem dokazali drugo točko izreka.

Tretjo točko dokažemo z indukcijo na q . Za $q = 1$ je $D_1(F) = M(F) = M(F_1)$. Naj za nek $q > 1$ velja $M(F_{q-1}) \subset D_{q-1}(F)$. Vzemimo

$$C_n = 1 + P_n(X_1, \dots, X_n) + h_{n+1}(X_1, \dots, X_n) \in D_n(F)$$

kot prej in naj bo

$$C = 1 + P'(X_1, \dots, X_n) + h'(X_1, \dots, X_n) \in M(F)$$

poljuben, kjer je $P'(X_1, \dots, X_n)$ stopnje $\leq n$ in $h'(X_1, \dots, X_n)$ stopnje $\geq n + 1$. Potem je

$$\begin{aligned} CC_n &= 1 + P'(X_1, \dots, X_n) + P_n(X_1, \dots, X_n) + \text{monomi višje stopnje} \\ C_n C &= 1 + P_n(X_1, \dots, X_n) + P'(X_1, \dots, X_n) + \text{monomi višje stopnje} \\ [C, C_n] &= (C_n C)^{-1} (C C_n) = 1 + \text{monomi višje stopnje} \end{aligned}$$

Torej je $[C, C_n] \in D_{n+1}(F)$ in $[M(F), D_n(F)] \subset D_{n+1}(F)$. Z upoštevanjem indukcijske predpostavke vidimo

$$M(F_q) = M([F, F_{q-1}]) = [M(F), M(F_{q-1})] \subset [M(F), D_{q-1}(F)] \subset D_q(F).$$

□

Za konec poglavja si pogledjmo še nekaj primerov spodnjih centralnih zaporedij grup.

Primer 2.10. Kot primer si oglejmo spodnja centralna zaporedja nekaj grup:

- (●) **G Abelova:** Če je G Abelova grupa, je $G_2 = [G, G] = 1$ in je torej G_i trivialna za $i > 1$. Dobimo spodnje centralno zaporedje

$$G \supseteq 1 \supseteq 1 \supseteq \dots$$

- (●) **$G = Q_8$ kvaternionska grupa:** Naj bo

$$Q_8 = \langle (-1), i, j, k \mid (-1)^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = (-1) \rangle$$

kvaternionska grupa. Opazimo, da je $1, (-1) \in Z(Q_8)$ ter da je

$$[i, j] = i^{-1} j^{-1} i j = i(-1)j(-1)ij = (-1)(-1)ijij = kk = (-1).$$

Podobno dobimo, da je $[i, k] = [j, i] = [k, i] = [j, k] = [k, j] = (-1)$. Potem je $(Q_8)_2 = \langle (-1) \rangle$. Iz $(-1) \in Z(Q_8)$ potem sledi $(Q_8)_3 = 1$. Dobili smo zaporedje

$$Q_8 \supseteq \langle (-1) \rangle \supseteq 1 \supseteq \dots$$

Grupe, katerih spodnje centralno zaporedje po nekem indeksu postane trivialno, imenujemo nilpotentne grupe. Te igrajo pomembno vlogo v teoriji grup.

- (●) $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ za $n > 1$: Zanima nas spodnje centralno zaporedje proste grupe na n generatorjih. Jasno je, da za noben $n \in \mathbb{N}$ grupa G_n ni trivialna, saj vsebuje komutator $[x_1, [x_1, [\dots, [x_1, x_2]]]] \neq 1$. Torej so vse grupe v spodnjem centralnem zaporedju G netrivialne. Če želimo o tem zaporedju povedati še več, lahko uporabimo Magnusovo razširitev in gledamo $M(G)$ namesto G . Izrek 2.9 nam je povedal, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $M(G_n) \subset D_n(G) \leq M(G)$. Po definiciji D_n opazimo

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n(G) = 1 \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n = 1.$$

Presek vseh grup v spodnjem centralnem zaporedju grupe G je torej trivialen. Takim grupam pravimo residualno nilpotentne grupe. Jasno je, da je vsaka nilpotentna grupa tudi residualno nilpotentna, obratno pa ne drži, kot smo ravnokar pokazali.

- (●) $G = \langle a, b \mid a^b = a^2 \rangle$: Opazimo, da je $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^b = a^{-1}a^2 = a$. Torej je $a \in G_2$. Opazimo, da če je $a \in G_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$, potem je $a^{-1} = [b, a] \in [G, G_n] = G_{n+1}$ in je potem tudi $a \in G_{n+1}$. Z indukcijo lahko torej pokažemo, da je $a \in G_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej, da je

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n.$$

Potem G ni niti nilpotentna niti residualno nilpotentna. Izbrana grupa G spada v zanimivo družino grup, ki jim pravimo Baumslag-Solitarove grupe.

◇

3 Poldnevnik in vzporednik

Nadaljujmo z obravnavanjem elementov fundamentalne grupe spleta, ki bodo igrali ključno vlogo pri razumevanju strukture fundamentalne grupe in njenih kvocientnih grup. Začnimo s poldnevniki, elementi, ki prečno obkrožijo dano komponento spleta.

Definicija 3.1 (Poldnevnik). Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in H kvocientna grupa $\frac{G(M-L)}{N}$ za neko podgrupo edinko $N \trianglelefteq G(M-L)$. Naj bo N_i cevasta okolica komponente L_i za poljuben $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_0 \in M - N_i$ in $p_i : I \rightarrow M$ pot od x_0 do neke točke v L_i , tako da $p_i(t) \in M - L$ za vsak $t < 1$.

Definiramo **poldnevnik** $\alpha_i(p_i, N_i)$ **i -te komponente spleta L** kot element v H , ki ga predstavlja zanka z začetkom v x_0 , ki sledi poti p_i do N_i , potem naredi homotopsko trivialno zanko v N_i okoli L_i s spletnim številom $+1$ z L_i , nazadnje pa se vrne po poti p_i^{-1} nazaj do točke x_0 .

Naslednji primer nam motivira kasnejši strukturni rezultat o poldnevniki.

Primer 3.2. Generatorji v Wirtingerjevi prezentaciji fundamentalne grupe spleta (izrek 1.33) so po njihovi definiciji poldnevniki. Iz relacij Wirtingerjeve prezentacije sledi, da so vsi generatorji, ki pripadajo lokom neke komponente spleta, v istem konjugiranostnem razredu.

Naj bosta namreč α_i in α_{i+1} dva generatorja, ki pripadata zaporednima lokoma (zaporedje lokov diagrama je določeno z orientacijo spleta). Oglejmo si relacijo, predpisano križišču, kjer se konča lok α_i in začne lok α_{i+1} . Ta je oblike $\alpha_i x^{\pm 1} \alpha_{i+1}^{-1} x^{\mp 1}$, kjer je x generator, ki je predpisan loku, h kateremu spada nadvoz v tem križišču. Potem je seveda $\alpha_{i+1} = \alpha_i^{x^{\pm 1}}$. Induktivno sklepamo, da so vsi generatorji, ki pripadajo lokom neke komponente, res v istem konjugiranostnem razredu. $\diamond$

Pri spletih v evklidskem prostoru bomo navadno za poldnevnik izbrali prav generatorje v Wirtingerjevi prezentaciji. Primer 3.2 nam pravi, da je ta izbira poljubna, poldnevnik pa je določen do konjugiranja v fundamentalni grupi natančno. Naslednja trditev nam pove, da to velja tudi za splete v splošnem prostoru.

Trditev 3.3. *Naj bo L n -splet v mnogoterosti M , H , x_0 in $p_i(t)$ kot v definiciji 3.1.*

- *Za dovolj majhni cevasti okolici N_i in N'_i komponente L_i velja $\alpha_i(p_i, N_i) = \alpha_i(p_i, N'_i)$.*
- *Za različni poti $p_i(t)$ in $p'_i(t)$ sta $\alpha_i(p_i, N_i)$ in $\alpha_i(p'_i, N_i)$ v istem konjugiranostnem razredu grupe H .*

Opomba: $\alpha_i(p_i, N_i)$ je za izbrana N_i in p_i enolično določen.

Dokaz trditve 3.3. Prva točka sledi iz dejstva, da če vzamemo dovolj majhno cevasto okolico N_i , da je $N_i \cap L = L_i$ in $N_i \approx \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$, potem so vse homotopsko trivialne zanke v N_i homotopne tudi v grupi $G(M - L)$ in njenih kvocientih.

Zanko $\lambda \in H$, tako da je

$$\alpha_i(p_i, N_i)^\lambda = \alpha_i(p'_i, N_i),$$

konstruiramo tako, da sledimo poti p'_i do N_i , potem znotraj N_i sledimo poti do točke na p_i , nato naredimo nasprotno zanko okoli L_i kot $\alpha_i(p_i, N_i)$, nazadnje pa sledimo p_i^{-1} nazaj do x_0 . $\square$

Poldnevnik neke komponente spleta torej tvorijo konjugiranostni razred, dokler jih definiramo v dovolj majhni cevasti okolici spleta. V nadaljevanju bomo vedno predpostavili, da smo za definicijo poldnevnika vzeli dovolj majhno okolico, zaradi česar bomo v oznaki poldnevnikov izpustili N_i . Poleg tega bomo običajno izpustili tudi označevanje poti, s katero je poldnevnik definiran.

Na podoben način kot poldnevnik definiramo tudi vzporednike, elemente, ki vzporedno obkrožijo dano komponento spleta.

Definicija 3.4 (Vzporednik). *Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in naj bodo H , x_0 , N_i in $p_i(t)$ kot v definiciji poldnevnika (definicija 3.1).*

Definiramo **vzporednik $\beta_i(p_i, N_i)$ i -te komponente spleta L** kot element grupe H , ki ga predstavlja zanka, ki se začne v x_0 , sledi poti p_i do N_i , potem naredi zanko vzdolž N_i , homotopno L_i , nazadnje pa se vrne po poti p_i^{-1} nazaj do točke x_0 .

Za vzporednike velja podoben, a rahlo bolj kompleksen strukturni rezultat kot za poldnevnik.

Trditev 3.5. *Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in naj bodo H , x_0 in $p_i(t)$ kot v definiciji poldnevnika (definicija 3.1).*

- Za izbrana N_i in p_i se dva vzporednika $\beta_i(p_i, N_i)$ in $\beta'_i(p_i, N_i)$ razlikujeta za faktor $\alpha_i(p_i, N_i)^k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$.
- Za dovolj majhni cevasti okolici N_i in N'_i komponente L_i za vsak $\beta_i(p_i, N_i)$ obstaja $\beta_i(p_i, N'_i)$, da je $\beta_i(p_i, N_i) = \beta_i(p_i, N'_i)$.
- Za različni poti $p_i(t)$ in $p'_i(t)$ za vsak $\beta_i(p_i, N_i)$ obstaja $\beta_i(p'_i, N_i)$, ki je v istem konjugiranostnem razredu grupe H .

Opomba: $\beta_i(p_i, N_i)$ za izbrana N_i in p_i ni enolično določen.

Dokaz Trditve 3.5. Recimo, da sta $\beta_i(p_i, N_i)$ in $\beta'_i(p_i, N_i)$ dva vzporednika i -te komponente spleta L . Potem je $\beta_i(p_i, N_i) \cdot \beta'_i(p_i, N_i)^{-1}$ zanka, ki sledi poti p_i , naredi homotopsko trivialno zanko v N_i okoli L_i s spletnim številom k z L_i , nato pa sledi poti p_i^{-1} . Torej je $\beta_i(p_i, N_i) \cdot \beta'_i(p_i, N_i)^{-1} = \alpha_i(p_i, N_i)^k$.

Če vzamemo dovolj majhno cevasto okolico N_i , da je $N_i \cap L = L_i$ in $N_i \approx \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$, potem so vse zanke v N_i , ki so homotopne L_i , paroma homotopne tudi v grupi $G(M - L)$ in njenih kvocientih.

Nazadnje, zanko $\lambda \in H$, tako da je

$$\beta_i(p_i, N_i)^\lambda = \beta_i(p'_i, N_i),$$

konstruiramo tako, da sledimo poti p'_i do N_i , potem znotraj N_i sledimo poti do točke na p_i , nato naredimo nasprotno zanko vzdolž N_i kot $\beta_i(p_i, N_i)$, nazadnje pa sledimo p_i^{-1} nazaj do x_0 . □

Kot pri poldnevniki bomo za vzporednike vedno predpostavili, da smo jih definirali v dovolj majhni cevasti okolici, zaradi česar bomo v oznaki vzporednikov izpustili N_i . V splošnem sta potem poljubna dva vzporednika i -te komponente spleta do množenja s poldnevnikom i -te komponente in konjugiranja natančno enaka. Iz prejšnje trditve je jasno, da lahko za splete v evklidskem prostoru to enakost napišemo na lepši način.

Primer 3.6. Za splet v evklidskem prostoru in dano število $k \in \mathbb{Z}$ so vsi vzporedniki izbrane komponente, ki imajo s to komponento spletno število enako k , v istem konjugiranostnem razredu grupe H . ◇

Kot pri poldnevniki bomo navadno izpustili tudi označevanje poti, s katero je definiran vzporednik. V splošnem se bo izkazalo za uporabno, da gledamo pare vzporednikov in poldnevnikov, ki jih definiramo z isto potjo.

Definicija 3.7 (Par poldnevnika in vzporednika). Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in naj bodo H , x_0 , N_i in $p_i(t)$ kot v definiciji poldnevnika (definicija 3.1). **Par $(\alpha_i(p_i), \beta_i(p_i))$ poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L** je dvojica poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L , ki sta definirana z isto potjo p_i .

Za splete v evklidskem prostoru se bodo izkazali posebej zanimivi tisti vzporedniki, ki imajo spletno število 0 s komponento, ki jo obkrožijo. Za njih imamo tudi prikladen način, da jih dobimo iz Wirtingerjeve prezentacije.

Trditev 3.8 ([2]). Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ in $G(\mathbb{R}^3 - L)$ njegova fundamentalna grupa, predstavljena z Wirtingerjevo prezentacijo glede na nek izbran diagram tega spleta. Predstavnik $\beta_i \in G(\mathbb{R}^3 - L)$ vzporednika k i -ti komponenti spleta L s spletnim številom $lk(L_i, \beta_i) = 0$ lahko poiščemo s sledečim postopkom:

1. Začnemo na poljubnem loku α_{k_0} i -te komponente L_i s prazno besedo $\beta_i = \varepsilon$.
2. Sledimo loku do konca. Ko se naš lok α_{k_0} konča v križišču σ_1 , tako da gre pod lokom α_{k_1} , pomnožimo β_i z $\alpha_{k_1}^{\text{sgn}(\sigma_1)}$.
3. Nadaljujemo vzdolž naslednjega loka in ponavljamo prejšnji korak za vsak lok, dokler ne pridemo nazaj na prvotni lok α_{k_0} .
4. Pomnožimo β_i z $\alpha_{k_0}^x$, kjer je x tak, da je vsota vseh eksponentov v končni besedi

$$\beta_i = \alpha_{k_1}^{\text{sgn}(\sigma_1)} \dots \alpha_{k_{m_i}}^{\text{sgn}(\sigma_{m_i})} \alpha_{k_0}^x$$

enaka 0 (kjer je m_i število križišč komponente L_i na izbranem diagramu).

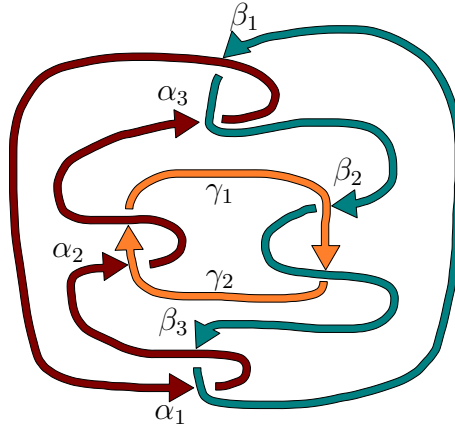
Dokaz trditve 3.8. Iz konstrukcije Wirtingerjeve prezentacije je jasno, da dobljena beseda predstavlja i -ti vzporednik β_i . Njegovo spletno število z L_i je 0, saj je spletno število vsakega $\alpha_{k_j}^{\text{sgn}(\sigma_j)}$ s komponento L_i enako $\text{sgn}(\sigma_j)$, ker so generatorji Wirtingerjeve prezentacije ravno poldnevnik. Tako je spletno število $lk(\beta_i, L_i)$ ravno vsota vseh eksponentov, ki je enaka 0.

□

Za konec poglavja si pogledjmo primer, kako v praksi poiskati poldnevnik in vzporednike.

Primer 3.9. Oglejmo si diagram spleta L v $\mathbb{R}^3$ na sliki 22. S postopkom iz trditve 3.8 lahko dobimo vzporednike v grupi $G(\mathbb{R}^3 - L)$, pri čemer začnemo na lokih α_1, β_1 in γ_1 :

vzporednik rdeče komponente:	$v_1 = \beta_1 \gamma_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1}$
vzporednik modre komponente:	$v_2 = \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_2 \beta_1^{-1}$
vzporednik rumene komponente:	$v_3 = \beta_3^{-1} \alpha_3^{-1} \gamma_1^2$



Slika 22: Diagram 3-spleta.

◇

4 Spletna homotopija in spletna grupa

V prvem poglavju smo spoznali klasično teorijo splotov, katere osrednja tematika je določiti splet do ambientne izotopije natančno. Kot smo videli, gre za veliko težji problem, kot bi si sprva mislili. Že za vozle ne obstaja preprost način, da bi preverili, če sta dva vozla ambientno izotopna. Za splete je problem seveda bistveno težji, saj je treba določiti tako zavozlanost vsake komponente posebej, kot tudi določiti prepletenost med komponentami. Tu se pojavi ideja: bi bilo mogoče zaznati in klasificirati prepletenost ločeno od zavozlanosti? Vprašanje je prvi zastavil John Milnor leta 1954 s člankom »Link groups« [11]. Danes je Milnor bržkone bolj znan po svojih dosežkih na drugih področjih matematike (teh je veliko), vendar ta članek ostaja podlaga, na kateri se je razvila bogata in zanimiva teorija preučevanja spletne homotopije. V tem poglavju bomo predstavili nekaj glavnih idej in rezultatov, ki se pojavijo v tem članku.

4.1 Spletna homotopija

Ko smo definirali ambientno izotopijo, smo omenili, da v resnici obstaja več smiselnih ekvivalenčnih relacij, ki jih lahko definiramo na množici vseh splotov. Relacija, ki jo bomo predstavili, poskuša zajeti idejo prepletanja, ne da bi upoštevala zavozlanost posameznih komponent. Tako se jo v literaturi pogosto predstavi kot »prepletanje po modulu zavozlanja«.

Definicija 4.1 (Spletna homotopija). Dva n -spleta L in L' v mnogoterosti M sta **spletno homotopna**, če za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ obstajajo homotopije $H^i(x, t) : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow M$ med L_i in L'_i , tako da so množice $H_t^1(\mathbb{S}^1), \dots, H_t^n(\mathbb{S}^1)$ paroma disjunktne za vsak $t \in [0, 1]$. Urejeni n -terici $(H^1, \dots, H^n)$ pravimo **spletna homotopija**. Spletne homotopije nam definirajo ekvivalenčno relacijo na splotih.

Preučevanje spletne homotopije bo osrednja tematika tega poglavja. Začnimo s tem, da je ambientna izotopija le poseben (in zelo zanimiv) primer spletne homotopije.

Primer 4.2. Vsaka ambientna izotopija je tudi spletna homotopija. ◇

Iz primera direktno sledi naslednje dejstvo:

Trditev 4.3. Vsaka invarianta za spletno homotopijo je tudi invarianta za ambientno izotopijo.

Obratno seveda ne drži, kot lahko vidimo v naslednjem primeru.

Primer 4.4. Za vozle je spletna homotopija kar običajna homotopija. Potem je množica (spletno) homotopskih razredov vozlov v mnogoterosti M natanko fundamentalna grupa $\pi_1(M)$ (pri tem dobimo celo izomorfno grupno strukturo za operacijo povezane vsote vozlov).

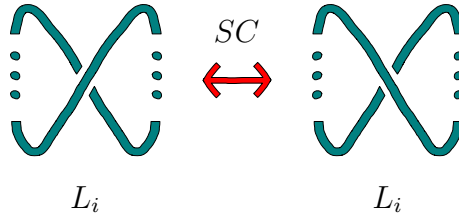
V posebnem primeru, vsi vozli v $\mathbb{R}^3$ so spletno homotopni. ◇

Ugotovitev, da spletna homotopija ne loči med vozli v evklidskem prostoru, se ujema z idejo, ki smo jo s spletno homotopijo poskusili zajeti – da spletna homotopija ne zazna zavozlanja. Ta lastnost pa vodi do nekaj problemov pri iskanju invariant za spletno homotopijo, saj očitno velja naslednji rezultat.

Trditev 4.5. Če invarianta za ambientno izotopijo loči med vozli v evklidskem prostoru, potem ni invarianta za spletno homotopijo.

Pri iskanju invariant za spletno homotopijo bomo torej morali definirati povsem nove invariante, ali pa močno modificirati invariante iz klasične teorije vozlov. Za začetek si pogledjmo modifikacijo trditve 1.18, s katero lahko iz diagramov dveh spletov določimo, če sta spleta spletno homotopna. Modifikacijo dobimo tako, da vpeljemo novo potezo na diagramih, ki poleg Reidemeistrovih potez zajame spletno homotopijo.

Definicija 4.6 (Samopresečna poteza). Za diagram spleta definiramo **samopresečno potezo** (slika 23), ki nam omogoča zamenjavo podvoza in nadvoza križišča, v katerem se komponenta spleta seka sama s sabo.



Slika 23: Samopresečna poteza.

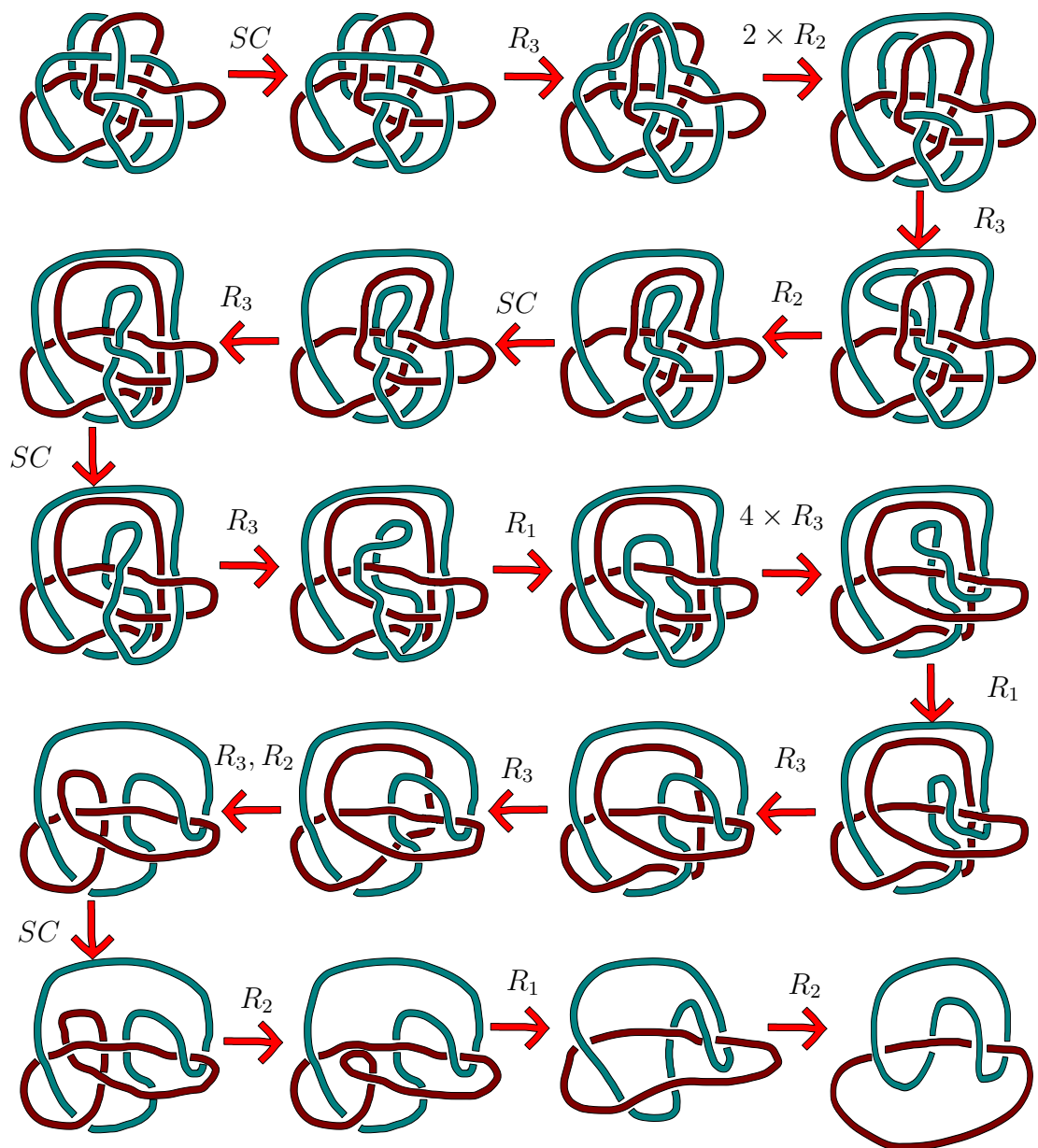
Trditev 4.7. Dva krotka spleta sta spletno homotopna natanko tedaj, ko sta njuna diagrama povezana s končnim zaporedjem Reidemeistrovih potez, samopresečnih potez in ravninskih ambientnih izotopij.

Dokaz trditve 4.7. Vemo (trditev 1.18), da sta dva krotka spleta ambientno izotopna natanko tedaj, ko sta njuna diagrama povezana s končnim zaporedjem Reidemeistrovih potez in ravninskih ambientnih izotopij. Spletno homotopijo lahko popravimo tako, da se obnaša kot ambientna izotopija povsod, razen ob končno mnogih časih t , ko pride do samopreseka neke komponente. Te samopreseke lahko na diagramih realiziramo s samopresečnimi potezami. S tem dokažemo našo trditev. □

Spletno homotopijo spletov v evklidskem prostoru lahko torej predstavimo kot zaporedje potez na diagramih spletov, kot smo to storili pri ambientni izotopiji, s tem, da smo morali vzeti eno potezo več. Pogledjmo si primer, kako nam samopresečna poteza lahko pomaga poenostaviti diagram spleta.

Primer 4.8. Na sliki 24 lahko vidimo zaporedje Reidemeistrovih in samopresečnih potez na diagramu, ki definira spletno homotopijo. ◇

Za konec razdelka kot zanimivost omenimo, da lahko spletno homotopijo, tako kot običajno ambientno izotopijo, posplošimo na poljubno dimenzijo (pri tem gledamo vložitve $\mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ za $n = k + 2$ in analogno definicijo spletne homotopije). Nedavno nazaj ob času pisanja, 6. marca 2025, so avtorji Maciej Borodzik, Mark



Slika 24: Spletna homotopija s potezami na diagramu.

Powell in Peter Teichner na portal arXiv objavili članek z naslovom »Link concordance implies link homotopy« [1], ki trdi, da so vse vložitve disjunktne unije k -dimenzionalnih sfer

$$\bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^{k+2}$$

za poljuben $k \geq 2$ trivialne do spletne homotopije natančno. Potem je vložitev $\sqcup \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3$, torej primer, ki ga obravnavamo, edini zanimiv primer z vidika spletne homotopije.

4.2 Spletna homotopija in spletno število

Oglejmo si še eno invarianto, ki smo jo že predstavili v prvem poglavju: spletno število. Naslednja trditev nam pove, da je spletno število v resnici invarianta tudi za spletno homotopijo.

Trditev 4.9. *Spletno število je invarianta za spletno homotopijo.*

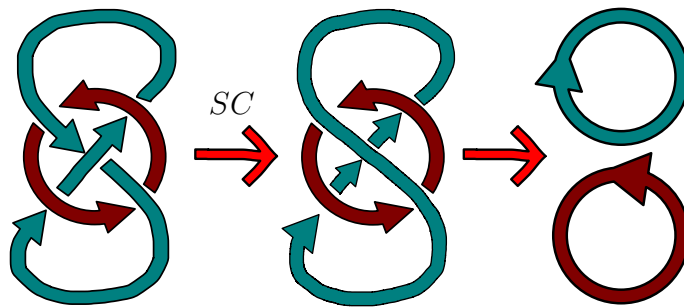
Dokaz trditve 4.9. Vemo, da je spletno število invarianta za ambientno izotopijo. Tako moramo preveriti le, da se spletno število ne spremeni pri samopresečni potezi. To dejstvo je očitno v luči trditve 1.26, saj samopresečna poteza spremeni le križišča med loki iste komponente. $\square$

V kontekstu spletne homotopije se bo spletno število izkazalo za veliko močnejšo invarianto kot v kontekstu ambientne izotopije, kot bomo videli na koncu tega poglavja. Za začetek si pogledajmo primer, ki smo ga že izračunali.

Primer 4.10. V primeru 1.27 smo za splet izračunali, da je njegovo spletno število enako -2 , v primeru 4.8 pa smo diagram tega spleta poenostavili do novega diagrama, iz katerega lažje razberemo spletno število. $\diamond$

Oglejmo si še Whiteheadov splet, ki smo ga v primeru 1.29 navedli kot zgled tega, da spletno število v kontekstu ambientne izotopije ne zazna vse prepletenosti med 2-spleti v evklidskem prostoru. V kontekstu spletne homotopije je primer bistveno manj zanimiv, saj se splet izkaže za trivialnega, iz česar lahko zaključimo, da je spletno število močnejša invarianta za spletno homotopijo kot za ambientno izotopijo.

Primer 4.11. Ponovno si oglejmo Whiteheadov splet (slika 25). Če izvedemo samopresečno potezo na modri komponenti, lahko komponenti spleta ločimo. Torej je Whiteheadov splet spletno homotopen trivialnemu 2-spletu. V primeru 1.29 smo povedali, da je spletno število Whiteheadovega spleta enako 0, kar se sklada z dejstvom, da je trivialen do spletne homotopije natančno.



Slika 25: Whiteheadov splet je homotopen trivialnemu 2-spletu.

$\diamond$

Navedimo še primer, kjer spletno število ni dovolj močna invarianta za spletno homotopijo.

Primer 4.12. Spomnimo se boromejskih obročev iz primera 1.28. Pokazali smo, da je spletno število poljubnih dveh komponent enako nič. Po drugi strani se zdi malo verjetno, da lahko komponente tega spleta ločimo s spletno homotopijo. Zdi se torej, da spletno število ni popolna invarianta za spletno homotopijo. $\diamond$

4.3 Spletna grupa

Pomanjkljivosti spletnega števila, tako v tem, da ga lahko definiramo le za splete v evklidskem prostoru, kot v tem, da tudi za splete v evklidskem prostoru ne zazna vse prepletenosti, nas motivirajo za iskanje močnejših invariant. Struktura, ki jo bomo definirali v tem razdelku, bo služila kot osnova za pridobivanje vseh drugih invariant za spletno homotopijo.

Definicija 4.13 (Spletna grupa). Naj bo L n -splet v mnogoterosti M . Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ označimo z L^i tisti $(n-1)$ -splet, ki ga dobimo, če spletu L odstranimo i -to komponento L_i .

Za vsak L^i imamo vložitveni homomorfizem

$$\varphi_i : G(M - L) \rightarrow G(M - L^i),$$

saj je $(M - L) \subset (M - L^i)$. Označimo z $A_i = \ker(\varphi_i)$ jedro tega homomorfizma in z $[A_i] \trianglelefteq G(M - L)$ njegovo komutatorsko podgrupo. Potem lahko definiramo **spletno grupo spleta L** :

$$\mathcal{G}(M - L) := \frac{G(M - L)}{[A_1] \dots [A_n]}.$$

Intuitivno si lahko predstavljamo, da je spletna grupa spleta ravno fundamentalna grupa, ki smo ji dodali relacije, ki jih inducirajo samopreseki posameznih komponent. Ta intuitivna razlaga seveda najbolje deluje za splete v evklidskem prostoru, kjer si spletno homotopijo lahko orišemo s samopresečnimi potezami.

Primer 4.14. Naj bo L n -splet v $\mathbb{R}^3$ in naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ generatorji v Wirtingerjevi prezentaciji grupe $G = G(\mathbb{R}^3 - L)$, ki smo jih pripisali lokom komponente L_1 na izbranem diagramu, $\beta_1, \dots, \beta_l$ pa vsi drugi generatorji.

Če imamo na diagramu spleta L križišče, v katerem L_1 seka sama sebe, bo Wirtingerjeva prezentacija v fundamentalni grupi dala relacijo $r : \alpha_i \alpha_k \alpha_j^{-1} \alpha_k^{-1}$, kjer lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da ima križišče pozitiven predznak. Če v križišču naredimo samopresečno potezo, bo Wirtingerjeva prezentacija novonastalega spleta imela relacijo $r' : \alpha_k \alpha_i^{-1} (\alpha'_k)^{-1} \alpha_i$, kjer smo iz loka α_k dobili loka α'_k in α_i in α_j pa sta se združila v enega. Definirajmo grupo H , ki ima za generatorje $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha'_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ in vse relacije grupe G , z dodanimi relacijami r' , $\alpha_k^{-1} \alpha'_k$ in $\alpha_i^{-1} \alpha_j$. V H lahko relacijo r' s pomočjo relacije $\alpha_k = \alpha'_k$ izrazimo kot $[\alpha_i, \alpha_k]$. Opazimo še, da relacijo $\alpha_i = \alpha_j$ v H lahko dobimo kot posledico relacij r in r' :

$$\begin{aligned} r : \alpha_i \alpha_k \alpha_j^{-1} \alpha_k^{-1} &= 1 & \implies \alpha_j &= \alpha_k^{-1} \alpha_i \alpha_k, \\ r' : \alpha_i^{-1} \alpha_k^{-1} \alpha_i \alpha_k &= 1 & \implies \alpha_i &= \alpha_k \alpha_i \alpha_k^{-1}, \\ \implies \alpha_j &= \alpha_i. \end{aligned}$$

Razmislimo sedaj, da lahko diagram spleta s končnim številom drugih Reidemeistrovih potez popravimo tako, da se katerakoli dva loka L_1 sekata: to storimo tako, da vzamemo enega od teh dveh lokov in ga preko diagrama nesemo čez drugega. Če želimo zajeti invarianto samopresečne poteze na L_1 , moramo torej grupi H dodati relacije $[\alpha_x, \alpha_y]$ za vsaka $x, y \in \{1, \dots, m\}$. Opazimo, da je $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle = A_1$. Če

želimo zajeti invarianco samopresečnih potez na vseh komponentah, moramo torej definirati

$$H = \frac{G}{[A_1] \dots [A_n]}.$$

Opazimo, da smo dobili ravno spletno grupo. Seveda to še ni dokaz, da je spletna grupa invarianta za spletno homotopijo, niti za splete v evklidskem prostoru, kaj šele v splošnem. Gre le za oris glavne ideje definicije spletne grupe. $\diamond$

Poglejmo si dva primera spletnih grup spletov v evklidskem prostoru, ki jih lahko izračunamo po definiciji.

Primer 4.15. Naj bo K nevozel v $\mathbb{R}^3$. V primeru 1.34 smo pokazali, da je njegova fundamentalna grupa ravno prosta grupa z enim generatorjem α . Oglejmo si vložitveni homomorfizem

$$\varphi : G(\mathbb{R}^3 - K) \rightarrow G(\mathbb{R}^3 - K^1) = \pi_1(\mathbb{R}^3) = 1.$$

Njegovo jedro A_1 je cela grupa $G(\mathbb{R}^3 - K)$, in je torej generirano z α . Ker je $G(\mathbb{R}^3 - K)$ komutativna, je $[A_1] = [G(\mathbb{R}^3 - K)] = 1$. Potem je

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - K) := \frac{G(\mathbb{R}^3 - K)}{[A_1]} = G(\mathbb{R}^3 - K) = \langle \alpha \rangle.$$

$\diamond$

Primer 4.16. Oglejmo si Hopfov splet v $\mathbb{R}^3$. V primeru 1.36 smo pokazali, da ima fundamentalna grupa Hopfovega spleta predstavitev $\langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] \rangle$. Ni težko videti, da je $A_1 = \langle \alpha \rangle$ in $A_2 = \langle \beta \rangle$. Ker je fundamentalna grupa komutativna, sta tudi A_1 in A_2 komutativni, in je $[A_1] = [A_2] = 1$. Potem je spletna grupa Hopfovega spleta ravno tako prosta Abelova grupa z dvema generatorjema, torej grupa s predstavitevjo $\langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] \rangle$.

$\diamond$

Pokažimo naslednji izrek, ki nam upraviči ime in uporabo spletne grupe.

Izrek 4.17 (Milnor [11]). *Spletna grupa je invarianta za spletno homotopijo.*

Za dokaz izreka bomo potrebovali preprosto lemo.

Lema 4.18. *Naj bosta X in Y topološka prostora in $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ homotopni preslikavi, ki sta homeomorfizma na svoji sliki. Potem imamo za poljuben $r \in \mathbb{N}$ izomorfizem*

$$H^r(Y, f_0(X); \mathbb{Z}) \cong H^r(Y, f_1(X); \mathbb{Z}).$$

Dokaz leme 4.18. Naj bosta M_0 in M_1 preslikavna stožca preslikav f_0 in f_1 . Potem nam homotopija med f_0 in f_1 inducira homotopsko ekvivalenco med M_0 in M_1 . Vemo, da se M_0 in M_1 krepko deformacijsko retraktirata na Y , ter da se pri tem $X \times I$ retraktira na $f_0(X)$ oziroma $f_1(X)$. Ker sta f_0 in f_1 homeomorfizma na svojo sliko, sta vložitvi $(M_0, X \times \{1\}) \hookrightarrow (M_0, X \times I)$ in $(M_1, X \times \{1\}) \hookrightarrow (M_1, X \times I)$ homotopski ekvivalenci. Potem imamo zaporedje izomorfizmov:

$$\begin{aligned} H^r(Y, f_0(X); \mathbb{Z}) &\cong H^r(M_0, X \times I; \mathbb{Z}) \cong H^r(M_0, X \times \{1\}; \mathbb{Z}) \cong \\ &\cong H^r(M_1, X \times \{1\}; \mathbb{Z}) \cong H^r(M_1, X \times I; \mathbb{Z}) \cong H^r(Y, f_1(X); \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

□

Dokaz izreka 4.17. Naj bo L splet v mnogoterosti M in $x_0 \in M - L$. Dokaz izreka razdelimo na tri podprimere:

(●) Splet L ima eno komponento:

Naj bo U univerzalni krov mnogoterosti M in naj bo V praslika spleta L v U . Potem je $U - V$ krovni prostor prostora $M - L$. Grupa vseh krovnih transformacij U je izomorfna fundamentalni grupi $\pi_1(M)$ mnogoterosti M , saj je U univerzalni krov. Naj bo $Y = \{y_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ vlakno točke x_0 . Definiramo grupo

$$\begin{aligned} H_1(U - V, Y) &\rtimes \pi_1(M) \\ (\lambda, \phi)(\lambda', \phi') &= (\lambda + \phi(\lambda'), \phi' \circ \phi), \end{aligned}$$

kjer $\pi_1(M)$ deluje na $H_1(U - V, Y)$ z induciranimi izomorfizmi krovnih transformacij dvigov zank z začetnim dvigom y_0 . Vložitev

$$f : M - L \hookrightarrow M$$

nam inducira homomorfizem

$$f_{\#} : G(M - L) = \pi_1(M - L) \rightarrow \pi_1(M).$$

Definiramo lahko homomorfizem

$$\begin{aligned} \rho : G(M - L) &\rightarrow H_1(U - V, Y) \rtimes \pi_1(M), \\ \alpha_k &\mapsto (\lambda_k, \phi_k) \end{aligned}$$

kjer je λ_k veriga v $H_1(U - V, Y)$, predstavljena z dvigom α_k v $U - V$, ki se začne v y_0 in konča v y_k , ϕ_k pa je krovna transformacija, določena s $f_{\#}(\alpha_k)$, ki slika y_0 v y_k . Jedro A_1 homomorfizma $f_{\#}$ je sestavljeno iz zank v $M - L$, ki so trivialne v M . Homomorfizem ρ te zanke preslika v dvojice verig, ki se začnejo in končajo v y_0 in trivialnih krovnih transformacij. Opazimo, da je $\pi_1(U - V) \cong A_1$, saj je $\pi_1(U)$ trivialna. Potem dobimo verigo izomorfizov

$$\frac{A_1}{\ker(\rho|_{A_1})} \cong \rho(A_1) \cong H_1(U - V, \{y_0\}) \rtimes 1 \cong H_1(U - V) \cong \frac{A_1}{[A_1]}.$$

Ker je $[A_1] \leq \ker(\rho|_{A_1})$, je potem $\ker(\rho|_{A_1}) = [A_1]$. Zanke v $G(M - L) - A_1$ gotovo ne morejo biti v jedru preslikave ρ , saj po definiciji A_1 njim pripadajoče krovne transformacije niso trivialne. Sledi

$$\ker(\rho) = [A_1].$$

Potem nam ρ definira izomorfizem

$$\hat{\rho} : \frac{G(M - L)}{[A_1]} \rightarrow \text{im}(\rho) \leq H_1(U - V, Y) \rtimes \pi_1(M).$$

Po Poincaré-Alexander-Lefschetzovi dualnosti [6] imamo izomorfizem

$$H_1(U - V, Y) = H_1((U \cup \infty) - (V \cup \infty), Y) \cong H^2(U \cup \infty - Y, V \cup \infty),$$

kjer je $U \cup \infty$ kompaktifikacija U z eno točko, lema 4.18 pa nam pove, da je ta grupa invariantna za homotopije $V \cup \infty$. Opazimo, da vsaka homotopija spleta L inducira homotopijo na $V \cup \infty$, saj je V praslika spleta L . Opazimo še, da sta grupa $\pi_1(M)$ in homomorfizem ρ invariantna za spletno homotopijo. Torej je $\text{im}(\rho)$ homotopsko invariantna in posledično je

$$\frac{G(M - L)}{[A_1]}$$

invariantna za homotopije na spletu L .

(●●) Splet L ima več komponent, vendar homotopija spremeni le eno:

Naj homotopija spremeni le komponento L_i . Namesto M lahko vzamemo $M - L^i$ in z enakim sklepanjem, kot v primeru spletoev z eno komponento dobimo, da je

$$\frac{G((M - L^i) - L_i)}{[A_i]}$$

invariantna za homotopije na komponenti L_i .

Vložitev $M - L \hookrightarrow M - L^j$ nam inducira naravno izbiro homomorfizma

$$\frac{G(M - L)}{[A_i(L)]} \rightarrow \frac{G(M - L^j)}{[A_i(L^j)]}.$$

Po definiciji je jedro tega homomorfizma

$$\frac{A_j[A_i]}{[A_i]},$$

komutatorska podgrupa jedra pa

$$\left[\frac{A_j[A_i]}{[A_i]} \right] = \frac{[A_j][A_i]}{[A_i]}.$$

To jedro je invariantno na homotopije komponente L_i . Opazimo:

$$\prod_{j \neq i} \frac{[A_j][A_i]}{[A_i]} = \frac{[A_1] \dots [A_n]}{[A_i]}.$$

Ker so vsa jedra invariantna na homotopijo komponente L_i , velja enako tudi za njihov produkt. Potem je

$$\mathcal{G}(M - L) = \frac{G(M - L)}{[A_1] \dots [A_n]}$$

invariantna za homotopije komponente L_i .

(●●●) Poljubna homotopija poljubnega spleta L :

Poljubno spletno homotopijo med spletooma L in L' lahko popravimo do take, ki ob vsakem času premika kvečjemu eno komponento spleta. Naj bo poljubna spletna

homotopija sestavljena iz homotopij $H^1, \dots, H^n$ posameznih komponent spleta. Ker so za vsak $t \in [0, 1]$ množice $H^1(\mathbb{S}^1, t), \dots, H^n(\mathbb{S}^1, t)$ paroma disjunktne, obstaja za vsak $t \in [0, 1]$ povezana odprta okolica $U_t \subset [0, 1]$, tako da je

$$\forall s, s' \in U_t, \forall x \neq y \in \{0, \dots, n\} : H^x(\mathbb{S}^1, s) \cap H^y(\mathbb{S}^1, s') = \emptyset.$$

Potem je množica $\{U_t \mid t \in [0, 1]\}$ odprto pokritje množice $[0, 1]$, ki je kompaktna, torej obstaja končno podpokritje $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_m}\}$, kjer je $t_k < t_l$ za $k < l$.

Naj bo $s_0 = 0$, $s_i \in U_{t_i} \cap U_{t_{i+1}}$ za $i \in 1, \dots, m-1$ in $s_m = 1$. Za vsak $i \in \{0, \dots, n\}$ razdelimo homotopijo $H^i(x, t)$ na dele $H_1^i, \dots, H_m^i$, kjer je za vsak $j \in \{1, \dots, m\}$

$$H_j^i(x, t) = H^i|_{\mathbb{S}^1 \times [s_{j-1}, s_j]}(x, t).$$

Če H_j^i komponiramo s preslikavo

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow [s_{j-1}, s_j] \\ x &\mapsto s_j x + (1 - x)s_{j-1} \end{aligned}$$

dobimo homotopijo, ki jo bomo označili s $\hat{H}_j^i$. Prav tako za $i \in \{1, \dots, n\}$ in $j \in \{1, \dots, m\}$ definiramo konstantno homotopijo

$$\begin{aligned} C_j^i : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\rightarrow M \\ (x, t) &\mapsto \hat{H}_j^i(x, 0) \end{aligned}$$

Sedaj lahko za vsaka $i \in \{1, \dots, n\}$ in $j \in \{1, \dots, m\}$ definiramo spletno homotopijo, ki spremeni le eno od komponent spleta. To je spletna homotopija $\mathcal{H}(i, j)$, ki je sestavljena iz homotopij

$$C_{j+1}^1, \dots, C_{j+1}^{i-1}, \hat{H}_j^i, C_j^{i+1}, \dots, C_j^m.$$

Če združimo vse spletne homotopije $\mathcal{H}_j^i$ v naslednjem vrstnem redu:

$$\mathcal{H}_1^1, \mathcal{H}_1^2, \dots, \mathcal{H}_1^n, \quad \mathcal{H}_2^1, \mathcal{H}_2^2, \dots, \mathcal{H}_2^n, \quad \dots \quad \mathcal{H}_m^1, \mathcal{H}_m^2, \dots, \mathcal{H}_m^n,$$

dobimo spletno homotopijo med L in L' , ki premika kvečjemu eno komponento spleta naenkrat. Opazimo, da vsaka od $\mathcal{H}_j^i$ zadošča predpostavkam prejšnje točke dokaza in torej inducira izomorfizem na spletni grupi. Če združimo vse te izomorfizme, dobimo izomorfizem, ki ga inducira poljubna homotopija. □

Sedaj, ko smo pokazali invarianto za spletno homotopijo, je smiselno bolje preučiti strukturne lastnosti spletne grupe. To bo osrednja tematika naslednjega dela tega poglavja.

4.4 Spletna grupa, poldnevnik in vzporedniki

Struktura spletne grupe je tesno povezana z vzporedniki in poldnevnik spleta. Pokažimo najprej, da lahko spletno grupo izrazimo s pomočjo poldnevnikov.

Trditev 4.19 ([11]). *Za n -splet L v mnogoterosti M in poldnevnik i -te komponente α_i v grupi $G(M - L)$ je podgrupa edinka $(\alpha_i) \trianglelefteq G(M - L)$, generirana z α_i , enaka A_i . Posledično je*

$$\mathcal{G}(M - L) = \frac{G(M - L)}{[(\alpha_1)] \dots [(\alpha_n)]}.$$

Poleg tega je za i -ti poldnevnik α'_i v grupi $\mathcal{G}(M - L)$ podgrupa edinka $(\alpha'_i) \trianglelefteq \mathcal{G}(M - L)$, generirana z α'_i , enaka jedru

$$\mathcal{A}_i := \ker \left(\mathcal{G}(M - L) \rightarrow \mathcal{G}(M - L^i) \right).$$

Dokaz trditve 4.19. Naj bo L n -splet v mnogoterosti M . Grupo $G(M - L)$ lahko po izreku Seiferta in van Kampena izrazimo kot amalgamiran produkt grup $\pi_1(\bar{N}_i - L_i)$ in $\pi_1(M - N_i)$, kjer je N_i odprta cevasta okolica poljubne komponente L_i . Če bi odstranili i -to komponento, bi prezentaciji grupe $\pi_1(N_i - L_i)$ dodali relacijo $\alpha_i = 1$. Potem je jedro homomorfizma

$$G(M - L) \rightarrow G(M - L^i)$$

generirano z α_i . Dokaz drugega dela trditve je enak, le da vzamemo spletno grupo. $\square$

Še ena pomembna lastnost spletne grupe je, da izomorfizmi spletnih grup, ki jih inducira spletna homotopija, ohranjajo pare poldnevnikov in vzporednikov, kot nam pove naslednji izrek.

Izrek 4.20 ([11]). *Naj bosta L in L' spletno homotopna spleta v mnogoterosti M in*

$$\varphi : \mathcal{G}(M - L) \rightarrow \mathcal{G}(M - L')$$

izomorfizem, določen z invarianto spletne grupe (izrek 4.17). Naj bosta (α_i, β_i) in (α'_i, β'_i) para poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L oziroma L' v grupi $\mathcal{G}(M - L)$ oziroma $\mathcal{G}(M - L')$. Potem je

$$\varphi((\alpha_i, \beta_i)) = (\gamma^{-1} \alpha'_i \gamma, \gamma^{-1} \beta'_i (\alpha'_i)^k \gamma)$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$ in $\gamma \in \mathcal{G}(M - L')$.

Dokaz izreka 4.20. Naj bosta (α_i, β_i) in (α'_i, β'_i) para poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L oziroma L' v grupi $\mathcal{G}(M - L)$ oziroma $\mathcal{G}(M - L')$. Trditev izreka preverimo na vsakem koraku dokaza izreka 4.17.

Omejimo se najprej na primer, kjer sta L in L' spleta z eno komponento. Naj bo $\mathcal{H} = H_1(U - V, Y) \rtimes \pi_1(M)$ in $\mathcal{H}' = H_1(U - V', Y') \rtimes \pi_1(M)$. Oglejmo si komutativen diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(M - L) = \frac{G(M-L)}{[A_1]} & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & \frac{G(M-L')}{[A'_1]} = \mathcal{G}(M - L') \\ & \searrow \hat{\rho} \quad \swarrow \hat{\rho}' & \\ & \mathcal{H} \cong \mathcal{H}' & \end{array}$$

Izomorfizem

$$\varphi : \mathcal{G}(M - L) \rightarrow \mathcal{G}(M - L')$$

je definiran kot kompozitum $\varphi = (\hat{\rho}')^{-1} \circ \hat{\rho}$. Poldnevnik α_1 je po definiciji homotopsko trivialna zanka v $\pi_1(M)$, torej je $\hat{\rho}(\alpha_1) = (\lambda, \text{id})$, kjer je λ zanka v $U - V$, ki obkroži V s spletnim številom $+1$. Potem je $\varphi(\alpha_1) = (\hat{\rho}')^{-1}(\hat{\rho}(\alpha_1))$ zanka v $M - L'$, ki je trivialna v M in obkroži L' s spletnim številom $+1$. Po definiciji je torej $\varphi(\alpha_1)$ poldnevnik, po trditvi 3.3 pa je $\varphi(\alpha_1) = (\alpha'_1)^\gamma$ za nek $\gamma \in \mathcal{G}(M - L')$.

S podobnim razmislekom dobimo, da je $\varphi(\beta_1)$ vzporednik spleta L' . Ker sta bila α_1 in β_1 definirana z isto potjo (enako za α'_1 in β'_1), je potem po trditvi 3.5 $\varphi(\beta_1) = \gamma^{-1} \beta'_1 (\alpha'_1)^k \gamma$ za nek $k \in \mathbb{Z}$ in isti $\gamma \in \mathcal{G}(M - L')$ kot prej.

Če imamo dva n -spleta L in L' in spletno homotopijo med njima, ki spremeni le eno komponento L_i , potem lahko problem prevedemo na homotopijo med vozlova v mnogoterosti $M - L^i$ in ga obravnavamo kot zgoraj. Vsi ostali pari poldnevnikov in vzporednikov ostanejo nespremenjeni. Enako kot v dokazu izreka 4.17 lahko potem poljubno spletno homotopijo popravimo do spletne homotopije, ki premika kvečjemu eno komponento naenkrat. S tem je dokaz izreka končan. $\square$

Razumevanje poldnevnikov in vzporednikov je torej ključen del razumevanja spletne grupe. Rezultat bo prišel prav kasneje, ko bomo iz vzporednikov v spletni grupi izluščili številске invariante.

4.5 Spletna grupa in konjugiranostni razredi

Predstavimo še en pomemben rezultat, ki kaže na to, kako močne invariante so spletne grupe v resnici.

Izrek 4.21 ([11]). *Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in naj bosta K in K' vozla v $M - L$. Predpostavimo lahko, da $K \cap K' \neq \emptyset$, saj lahko v nasprotnem primeru z ambientno izotopijo premaknemo nek del vozla K' do vozla K . Potem za izbrano bazno točko $x_0 \in K \cap K'$ vozla K in K' predstavljata neka elementa v $G(M - L)$ in posledično v $\mathcal{G}(M - L)$. Če sta elementa, ki ju predstavljata K in K' , v istem konjugiranostnem razredu grupe $\mathcal{G}(M - L)$, sta $(n + 1)$ -spleta $L \cup K$ in $L \cup K'$ homotopna.*

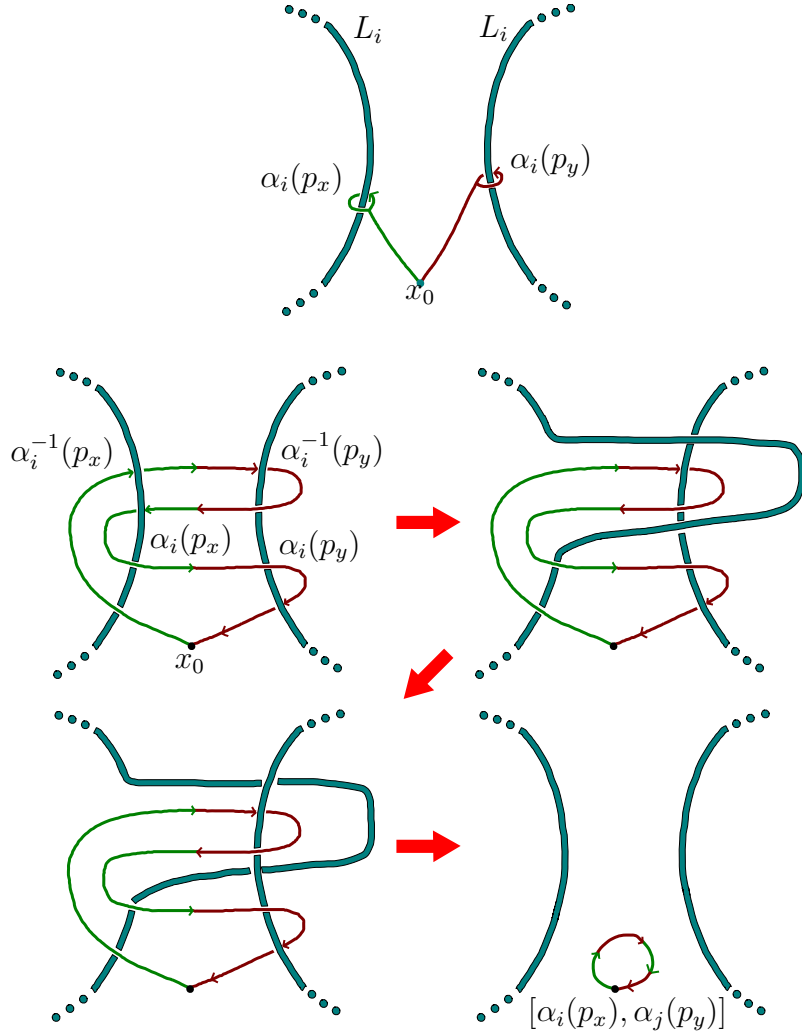
Dokaz izreka 4.21. Naj bo L n -splet v mnogoterosti M in naj bosta K in K' vozla v $M - L$. Predpostavimo najprej, da K in K' predstavljata isti element $\bar{K}$ grupe $\mathcal{G}(M - L) = \frac{G(M-L)}{[A_1] \dots [A_n]}$, torej, da lahko pišemo $K = K' \delta$ za nek $\delta \in [A_1] \dots [A_n]$. Ker je δ element notranjega direktnega produkta, lahko pišemo $\delta = \delta_1 \dots \delta_m$, kjer za vsak $j \in \{1, \dots, m\}$ obstaja $i \in \{1, \dots, n\}$, da je $\delta_j \in [A_i]$. Trditev dokažemo z indukcijo na m , dolžino tega produkta.

Če je $m = 1$, je $\delta = \delta_1 \in [A_i]$ za nek $i \in \{1, \dots, n\}$. Z α_i označimo poldnevnik i -te komponente spleta L . Po trditvi 4.19 je $(\alpha_i) = A_i$. Torej lahko poljuben element $[A_i]$ zapišemo kot produkt komutatorjev α_i in α_i^{-1} ter konjugiranj α_i in α_i^{-1} . Iz trditve 3.3 vemo, da so ta konjugiranja ravno poldnevniki i -te komponente spleta L , ki smo jih definirali z neko drugo potjo do L_i . Na sliki 26 vidimo, da lahko vse take komutatorje trivializiramo s homotopijo L_i . S tem dobimo spletno homotopijo med $L \cup K$ in $L \cup K \delta_1 = L \cup K'$.

Vzemimo $m > 1$ in recimo, da trditev velja za produkte dolžine $m - 1$. Potem je $\delta = \delta_1 \dots \delta_{m-1} \delta_m$, kjer imamo za vsak $j \in \{1, \dots, m\}$ vsebovanost $\delta_j \in [A_i]$ za nek $i \in \{1, \dots, n\}$. Po induksijski predpostavki je K homotopen $K\delta_1 \dots \delta_{m-1}$, z enakim razmislekom kot za $m = 1$ pa dobimo, da je $K\delta_1 \dots \delta_{m-1}$ homotopen $K\delta_1 \dots \delta_{m-1} \delta_m$. Sledi, da je splet $L \cup K$ homotopen spletu $L \cup K\delta_1 \dots \delta_m = L \cup K'$.

Naj bosta sedaj K in K' v istem konjugiranostnem razredu, torej $K' = K^\delta \in \mathcal{G}(M - L)$ za nek $\delta \in \mathcal{G}(M - L)$. Opazimo, da sta spleta $L \cup K$ in $L \cup K'$ homotopna, saj lahko bazno točko premaknemo vzdolž zanke δ . S tem je izrek dokazan. $\square$

Izrek 4.21 nam pove, da lahko spletno homotopijo med dvema spletoma realiziramo kot spletno homotopijo med podspletoma, ki prenese izpuščene komponente prvega spleta v konjugiranostne razrede izpuščenih komponent drugega spleta. Lastnost bo ključnega pomena pri klasifikaciji spletno homotopskih tipov spletov.



Slika 26: Spletna homotopija trivializira komutatorje poldnevnikov i -te komponente, določenih z različnimi potmi p_x in p_y .

4.6 Klasifikacija 2-spletov do spletne homotopije natančno

Poglavje zaključimo z zanimivim rezultatom, da je v evklidskem prostoru že spletno število dovolj močna invarianta za klasifikacijo 2-spletov do spletne homotopije natančno.

Izrek 4.22. *Spletno število določa 2-splete v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno.*

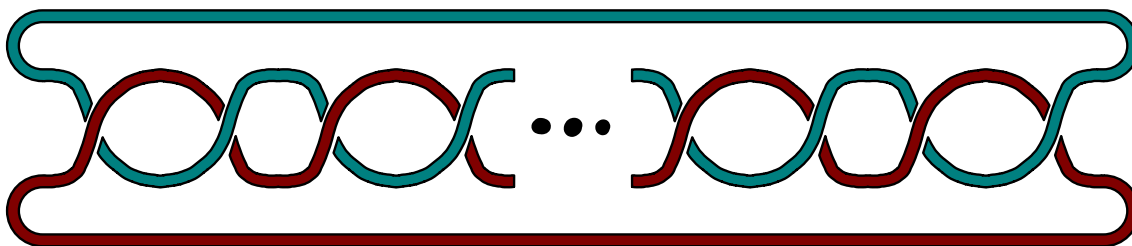
Dokaz izreka 4.22. Naj bo $L = (L_1, L_2)$ 2-splet v $\mathbb{R}^3$. Spomnimo se, da je $\pi_1(\mathbb{R}^3) = 1$. Potem je po izreku 4.21 homotopski razred L natanko določen s konjugiranostnim razredom L_2 v

$$\mathcal{G}(M - L_1) = \frac{G(M - L_1)}{[A_1]} = \frac{G(M - L_1)}{[G(M - L_1)]} \cong H_1(M - L_1).$$

Ker gre za Abelovo grupo, so vsi konjugiranostni razredi trivialni. Homotopski tip spleta je torej določen s homološkim razredom L_2 v $H_1(M - L_1)$. Iz definicije 1.23 opazimo, da je to ravno spletno število. Torej je L določen do homotopije natančno s spletnim številom. $\square$

Vidimo, da lahko v kontekstu spletne homotopije dosežemo veliko močnejše rezultate kot v kontekstu ambientne izotopije. Tam je popolna klasifikacija 2-spletov praktično nemogoča, kaj šele klasifikacija, ki sloni na tako preprosti in lahko izračunljivi invarianti, kot je spletno število.

Primer 4.23. Po izreku 4.22 lahko spletno homotopski tip poljubnega 2-spleta v $\mathbb{R}^3$ predstavimo z diagramom na sliki 27 za neko število ovojev in nek izbor orientacij.



Slika 27: Spletno homotopski tip poljubnega 2-spleta.

◇

5 Chen-Milnorjeva predstavitev

V tem poglavju bomo pozornost preusmerili na družino grup, ki jih dobimo kot kvociente fundamentalne grupe spleta po elementih spodnjega centralnega zaporedja neke podgrupe fundamentalne grupe. Podobno kot spletna grupa se bodo te grupe izkazale za spletne invariante, tokrat za ambientno izotopijo. Kot bomo videli na koncu poglavja, ta podobnost ni le navidezna, saj so omenjene grupe tesno povezane. To družino grup je v kontekstu teorije spletov prvi preučeval Kuo-Tsai Chen v članku »Isotopy invariants of links« [3] iz leta 1952. Chen je bil sodelavec (in soavtor več

člankov) z Ralphom Foxom, tako da je bilo njegovo delo gotovo znano Foxu in Milnorju. Že v članku »Link groups« [11] je Milnor slutil povezavo med Chenovim delom in spletno homotopijo. Tako je leta 1957 izdal članek »Isotopy of links« [10], v katerem je posplošil Chenovo delo, konstruiral izrecne predstavitve grup, nato pa iz njih izluščil družino številskih invariant, tako za ambientno izotopijo kot tudi za spletno homotopijo, ki jih bomo predstavili v naslednjem poglavju.

5.1 Milnorjev izrek

Za začetek definirajmo oznako, ki nam bo olajšala nadaljnje delo.

Definicija 5.1 (Jedro vložitvenega homomorfizma). Naj bo (B, A) par topološkega prostora B in njegovega podprostora A . Potem imamo naravno izbiro vložitvenega homomorfizma

$$\varphi : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B).$$

Vpeljemo oznako $K(A, B) := \ker(\varphi)$, **jedro vložitvenega homomorfizma**.

V kontekstu teorije spletov nas bodo zanimala predvsem jedra homomorfizmov, inducirana z vložitvami $M - L \hookrightarrow M$, kjer je L splet v mnogoterosti M . Ta jedra se izrazijo posebej lepo, če za ambientni prostor vzamemo evklidski prostor.

Primer 5.2. Ker je $\pi_1(\mathbb{R}^3) = 1$, je $K(\mathbb{R}^3 - L, \mathbb{R}^3) = G(\mathbb{R}^3 - L)$. ◇

Z definiranimi jedri lahko izrazimo pomembno družino grup

$$\left\{ \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \mid q \in \mathbb{N} \right\},$$

kjer indeks q označuje q -ti člen spodnjega centralnega zaporedja grupe $K(M - L, M)$ iz definicije 2.8. Za te grupe velja naslednji pomemben izrek.

Izrek 5.3 (Milnor [10]). *Naj bo L splet v mnogoterosti M . Za vsak $q \in \mathbb{N}$ obstaja okolica N spleta L , tako da za vsak splet L' , ki leži v N in je spletno homotopen L , velja:*

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \cong \frac{G(M - L')}{K_q(M - L', M)}.$$

Dokaz izreka je zelo dolg in tehničen, njegovo razumevanje pa ne nudi bistvenega vpogleda v strukturo družine grup, ki jo obravnavamo. V namen preglednosti besedila je zaradi tega dokaz na tem mestu izpuščen. Dokaz je v celoti predstavljen v dodatku [D].

S pomočjo izreka 5.3 lahko z zelo malo truda pokažemo, da je definirana družina kvocientnih grup družina invariant za ambientno izotopijo spletov. Pri tem omenimo, da je Milnor pokazal invarianco za izotopijo, ki je splošnejša relacija kot ambientna izotopija, vendar se bomo mi osredotočili le na ambientno izotopijo (čeprav bomo v resnici dokazali splošnejšo trditev).

Izrek 5.4 ([10]). *Za splet L v mnogoterosti M in poljuben $q \in \mathbb{N}$ je*

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}$$

invarianta za ambientno izotopijo.

Dokaz izreka 5.4. Naj bo $q \in \mathbb{N}$ ter naj bo $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ ambientna izotopija med spletnoma L in L' v mnogoterosti M . Potem je $L_t = F_t(L)$ splet za vsak $t \in [0, 1]$ in $L_0 = L$, $L_1 = L'$. Naj bo $N_t \subset M$ okolica za L_t iz izreka 5.3 in naj bo

$$U_t = \{s \in [0, 1] \mid L_s \subset N_t\} \subset [0, 1].$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so množice U_t povezane, saj lahko v nasprotnem primeru za vsak $t \in [0, 1]$ namesto U_t vzamemo tisto komponento za povezanost od U_t , v kateri se nahaja t . Potem je $\{\mathring{U}_t \mid t \in [0, 1]\}$ odprto pokritje $[0, 1]$. Ker je $[0, 1]$ kompakt, obstaja končno podpokritje

$$\mathring{U}_{t_1}, \dots, \mathring{U}_{t_k},$$

kjer je $t_i < t_{i+1}$ za $i = 1, \dots, k-1$. Naj bodo $s_1, \dots, s_{k-1} \in [0, 1]$ taki, da je $L_{s_i} \subset \mathring{U}_i \cap \mathring{U}_{i+1}$. Ker je ambientna izotopija tudi spletna homotopija, dobimo izomorfizme

$$\begin{aligned} \frac{G(M - L_0)}{K_q(M - L_0, M)} &\cong \frac{G(M - L_{s_1})}{K_q(M - L_{s_1}, M)} \cong \dots \\ &\dots \cong \frac{G(M - L_{s_{k-1}})}{K_q(M - L_{s_{k-1}}, M)} \cong \frac{G(M - L_1)}{K_q(M - L_1, M)}, \end{aligned}$$

kar smo želeli pokazati. □

Za posebej zanimive se bodo izkazali spleti v evklidskem prostoru. Kot smo razmislili že prej, je v tem primeru $K(\mathbb{R}^3 - L, \mathbb{R}^3)$ ravno $G(\mathbb{R}^3 - L)$, tako da za vsak $q \in \mathbb{N}$ dobimo kvocient

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)}.$$

Za $q = 2$ je to seveda ravno abelizacija grupe $G(\mathbb{R}^3 - L)$, torej grupa $H_1(\mathbb{R}^3 - L)$. Poglejmo si še en preprost primer, ki ga lahko izračunamo iz definicije.

Primer 5.5. V primeru 1.36 smo pokazali, da je fundamentalna grupa Hopfovega spleta v evklidskem prostoru ravno $G = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Ker je grupa Abelova, je za vsak $q > 1$ grupa G_q trivialna. Potem je

$$\frac{G}{G_q} \cong G$$

za vsak $q > 1$. ◇

5.2 Milnorjev izrek, poldnevniki in vzporedniki

Za definirano družino kvocientnih grup in ambientno izotopijo velja podoben rezultat kot za spletno grupo in spletno homotopijo: to je, da izomorfizmi, ki jih inducirajo ambientne izotopije, ohranjajo pare poldnevnikov in vzporednikov. Trditev najprej preverimo za izomorfizme iz izreka 5.3, nato pa jo razširimo do izomorfizmov iz izreka 5.4.

Trditev 5.6 ([10]). Naj bo L splet v mnogoterosti M , $q \in \mathbb{N}$ in $N \subset M$ okolica spleta L , ki jo dobimo z izrekom 5.3. Naj bo L' splet v N , ki je homotopen spletu L , in naj bo

$$\varphi : \frac{G(M-L)}{K_q(M-L, M)} \rightarrow \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$$

izomorfizem iz izreka 5.3. Naj bosta (α_i, β_i) in (α'_i, β'_i) para poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L oziroma L' v grupi $\frac{G(M-L)}{K_q(M-L, M)}$ oziroma $\frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$. Potem je

$$\varphi((\alpha_i, \beta_i)) = (\gamma^{-1} \alpha'_i \gamma, \gamma^{-1} \beta'_i (\alpha'_i)^k \gamma)$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$ in $\gamma \in \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$.

Dokaz trditve 5.6. Poldnevniki in vzporedniki spleta L v okolici $N_q - \bar{N}$ (definirali smo jih tudi v dokazu izreka 5.3), so poldnevniki in vzporedniki vsakega spleta L' v N , ki je homotopen spletu L . Torej je $\varphi((\alpha_i, \beta_i)) = (\varphi(\alpha_i), \varphi(\beta_i))$ par poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L' . Po trditvah 3.3 in 3.5 je potem

$$\varphi((\alpha_i, \beta_i)) = (\gamma^{-1} \alpha'_i \gamma, \gamma^{-1} \beta'_i (\alpha'_i)^k \gamma)$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$ in $\gamma \in \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$. □

Izrek 5.7 ([10]). Naj bosta L in L' ambientno izotopna spleta v mnogoterosti M , naj bo $q \in \mathbb{N}$ in naj bo

$$\varphi : \frac{G(M-L)}{K_q(M-L, M)} \rightarrow \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$$

izomorfizem, ki ga dobimo z izrekom 5.4. Naj bosta (α_i, β_i) in (α'_i, β'_i) para poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta L oziroma L' v grupi $\frac{G(M-L)}{K_q(M-L, M)}$ oziroma $\frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$. Potem je

$$\varphi((\alpha_i, \beta_i)) = (\gamma^{-1} \alpha'_i \gamma, \gamma^{-1} \beta'_i (\alpha'_i)^k \gamma)$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$ in $\gamma \in \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$.

Dokaz izreka 5.7. Na enak način kot pri dokazu izreka 5.4 lahko dobimo zaporedje izomorfizmov

$$\begin{aligned} \frac{G(M-L)}{K_q(M-L, M)} &\stackrel{\varphi_1}{\cong} \frac{G(M-L_{s_1})}{K_q(M-L_{s_1}, M)} \stackrel{\varphi_s}{\cong} \dots \\ &\dots \stackrel{\varphi_{k-1}}{\cong} \frac{G(M-L_{s_{k-1}})}{K_q(M-L_{s_{k-1}}, M)} \stackrel{\varphi_k}{\cong} \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}, \end{aligned}$$

kjer je

$$\varphi = \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1.$$

Opazimo, da za vsak izomorfizem φ_i velja trditev 5.6. Dokaz izreka končamo s preprosto indukcijo na število teh izomorfizmov k :

Če je $k = 1$, imamo ravno primer iz trditve 5.6. Potem dokaz sledi enako kot tam.

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in naj izrek velja za kompozitume izomorfizmov dolžine manj od k . Definiramo

$$(\alpha_i^\#, \beta_i^\#) = (\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(\alpha_i), \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(\beta_i)).$$

To je par poldnevnika in vzporednika i -te komponente spleta $L_{s_{k-1}}$. Po trditvi 5.6 je potem

$$\varphi_k((\alpha_i^\#, \beta_i^\#)) = (\gamma^{-1} \alpha_i' \gamma, \gamma^{-1} \beta_i' (\alpha_i')^k \gamma)$$

za nek $k \in \mathbb{Z}$ in $\gamma \in \frac{G(M-L')}{K_q(M-L', M)}$. Potem je

$$\begin{aligned} \varphi((\alpha_i, \beta_i)) &= \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1((\alpha_i, \beta_i)) = \varphi_k(\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1((\alpha_i, \beta_i))) = \\ &= \varphi_k((\alpha_i^\#, \beta_i^\#)) = (\gamma^{-1} \alpha_i' \gamma, \gamma^{-1} \beta_i' (\alpha_i')^k \gamma). \end{aligned}$$

□

Ponovno se poldnevnik in vzporednik izkažeta ključna za razumevanje obravnavanih grup. Kot pri spletni grupi nam bo izrek kasneje prišel prav pri definiranju številskih invariant.

5.3 Chen-Milnorjeva predstavitev

Če bomo želeli o grupah povedati kaj več, se bomo morali omejiti na posebej preprosto družino spleto, iz katere smo do sedaj navedli tudi večino primerov: spleti v evklidskem prostoru. Že Chen [3] je pokazal, da imajo obravnavane grupe n -spletov v evklidskem prostoru predstavitev z le n generatorji. Milnor [10] pa je podal izrecno predstavitev teh grup, ki jo bomo sedaj izpeljali.

Izrek 5.8 (Chen-Milnorjeva predstavitev [10]). *Za n -splet L v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ in poljuben $q \in \mathbb{N}$ imamo predstavitev*

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], F_q \right\rangle,$$

kjer sta za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ generator α_i poldnevnik i -te komponente spleta L in β_i beseda v $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki predstavlja vzporednik i -te komponente spleta L . Poleg tega je $F = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ prosta grupa na n generatorjih $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, F_q pa q -ti člen njenega spodnjega centralnega zaporedja.

Opomba: Kot bomo videli v dokazu, predstavitev temelji na Wirtingerjevi prezentaciji in torej na izbranem diagramu spleta. Za drugačne diagrame lahko dobimo drugačne predstavitve.

Dokaz izreka 5.8. Naj bo $q \in \mathbb{N}$, L n -splet v $\mathbb{R}^3$, in naj bo m_i število lokov (ki je enako številu križišč) i -te komponente L_i nekega izbranega diagrama spleta L . Potem imamo za grupo $G(\mathbb{R}^3 - L)$ Wirtingerjevo prezentacijo (1.33)

$$G = G(\mathbb{R}^3 - L) = \langle a_{ij} \mid r_{ij} \rangle,$$

kjer za $i \in \mathbb{Z}_n$ in $j \in \mathbb{Z}_{m_i}$ generatorji a_{ij} ustrezajo zankam okoli lokov in relacije $r_{ij} = a_{i(j+1)}^{-1} x_{ij}^{-1} a_{ij} x_{ij}$ ustrezajo križiščem, v katerih se končajo loki a_{ij} . Pri tem je x_{ij}

generator G , ki ustreza zanki okoli nadvoznega loka v križišču, ki mu ustreza relacija r_{ij} . Če označimo $y_{ij} = x_{i0} \dots x_{ij}$, dobimo ekvivalentne relacije $r'_{ij} = a_{i(j+1)}^{-1} y_{ij}^{-1} a_{i0} y_{ij}$. Relacije so res ekvivalentne, saj je $r_{i0} = r'_{i0}$ in $r_{ij} = r'_{ij} (x_{ij}^{-1} (r'_{i(j-1)})^{-1} x_{ij})$.

Naj bosta

$$A = \langle a_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \rangle \text{ in } F = \langle a_{i0} \mid i \in \mathbb{Z}_n \rangle$$

prosta grupa in njena prosta podgrupa. Za $k \in \mathbb{N}$ rekurzivno definiramo homomorfizme

$$\begin{aligned} \eta_k : A &\rightarrow F \\ \eta_1(a_{ij}) &= a_{i0} & \forall i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \\ \eta_k(a_{i0}) &= a_{i0} & \forall i \in \mathbb{Z}_n \\ \eta_k(a_{ij}) &= \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)}) & \forall k \neq 1, i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Naj bo $R' = \langle r'_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \rangle \trianglelefteq A$ podgrupa edinka, generirana z relacijami r'_{ij} , tako da je

$$\frac{A}{R'} \cong G.$$

Potem imamo predstavitev

$$\frac{A}{R'A_q} \cong \frac{G}{G_q}.$$

Za nadaljevanje dokaza bomo potrebovali naslednjo lemo:

Lema 5.9. Če je za poljubno grupo G in $x_1, x_2 \in G$

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{G_{k-1}},$$

potem je

$$x_1^{-1} y x_1 \equiv x_2^{-1} y x_2 \pmod{G_k}$$

za vsak $y \in G$.

Opomba: za grupi $H \leq G$ in $g_1, g_2 \in G$ je

$$g_1 \equiv g_2 \pmod{H},$$

če je $g_1 g_2^{-1} \in H$, oziroma če se g_1 in g_2 razlikujeta za nek faktor iz H .

Dokaz leme 5.9. Iz

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{G_{k-1}}$$

sledi

$$x_1 x_2^{-1} \equiv 1 \pmod{G_{k-1}}$$

in potem je

$$[y, x_1 x_2^{-1}] = y^{-1} x_2 x_1^{-1} y x_1 x_2^{-1} \equiv 1 \pmod{[G, G_{k-1}] = G_k}.$$

Če preuredimo enačbo, dobimo

$$x_1^{-1} y x_1 \equiv x_2^{-1} y x_2 \pmod{G_k}.$$

□

Z indukcijo na k pokažemo, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsaka $i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i}$ velja

$$\eta_k(a_{ij}) \equiv a_{ij} \pmod{R'A_k}.$$

Trditev je očitna za $k = 1$ ali $j = 0$. Naj bo $2 \leq k \in \mathbb{N}$ in naj velja

$$\eta_{k-1}(a_{ij}) \equiv a_{ij} \pmod{R'A_{k-1}}$$

za vsaka $i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i}$. Ker je $y_{i(j-1)} \in A = \langle a_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \rangle$, je potem

$$\eta_{k-1}(y_{i(j-1)}) \equiv y_{i(j-1)} \pmod{R'A_{k-1}}.$$

Potem je po lemi 5.9

$$\eta_{k-1}(y_{i(j-1)})^{-1} a_{i0} \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}) \equiv y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)} \pmod{R'A_k}.$$

Ker je $\eta_{k-1}(a_{i0}) = a_{i0}$, dobimo

$$\begin{aligned} \eta_k(a_{ij}) &= \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)}) = \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}^{-1}) a_{i0} \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}) \equiv \\ &\equiv y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)} \pmod{R'A_k} \\ &\equiv a_{ij} \pmod{R'A_k}, \end{aligned}$$

kjer smo zadnjo kongruenco dobili z relacijo $r'_{i(j-1)} = a_{ij}^{-1} y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)}$.

Z indukcijo na k pokažemo tudi, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsaka $i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i}$ velja

$$\eta_k(a_{ij}) \equiv \eta_{k+1}(a_{ij}) \pmod{F_k}.$$

Spet je trditev jasna za $k = 1$ ali $j = 0$. Naj bo $2 \leq k \in \mathbb{N}$ in naj velja

$$\eta_{k-1}(a_{ij}) \equiv \eta_k(a_{ij}) \pmod{F_{k-1}}$$

za vsaka $i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i}$. Ker je $y_{i(j-1)} \in A = \langle a_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \rangle$, je

$$\eta_{k-1}(y_{i(j-1)}) \equiv \eta_k(y_{i(j-1)}) \pmod{F_{k-1}}.$$

Z uporabo leme 5.9 in enakosti $\eta_k(a_{i0}) = \eta_{k-1}(a_{i0}) = a_{i0}$ dobimo

$$\begin{aligned} \eta_k(a_{ij}) &= \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}^{-1} a_{i0} y_{i(j-1)}) = \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}^{-1}) a_{i0} \eta_{k-1}(y_{i(j-1)}) \equiv \\ &\equiv \eta_k(y_{i(j-1)}^{-1}) a_{i0} \eta_k(y_{i(j-1)}) \pmod{F_k} \\ &= \eta_{k+1}(a_{ij}). \end{aligned}$$

Oglejmo si diagram (na katerem sta π_A in π_G kanonična epimorfizma):

$$\begin{array}{ccccc} \langle a_{ij} \rangle & \xlongequal{\quad} & A & \xrightarrow[\ker(\pi_A)=R']{\pi_A} & G & \xlongequal{\quad} & \langle a_{ij} \mid r'_{ij} \rangle \\ & & \eta_k \updownarrow & & \downarrow \pi_G & & \\ \langle a_{i0} \rangle & \xlongequal{\quad} & F & & \frac{G}{G_q} & \xlongequal{\quad} & \langle a_{ij} \mid r'_{ij}, A_q \rangle \end{array}$$

Ker je

$$\eta_k(a_{ij}) \equiv a_{ij} \pmod{R'A_k},$$

lahko dobimo relacije $a_{ij}^{-1}\eta_q(a_{ij}) = 1$ v $\frac{G}{G_q}$ iz relacij $R'A_q$ in jih lahko vstavimo v našo predstavitev. Z njimi lahko izrazimo $a_{ij} = \eta_q(a_{ij})$ z a_{i0} za vse $i \in \mathbb{Z}_n$ in $j \in \mathbb{Z}_{m_i} \setminus \{0\}$. Dobimo predstavitev

$$\frac{G}{G_q} = \langle a_{i0} \mid \eta_q(r'_{ij}), \eta_q(A_q) \rangle.$$

Opazimo, da je $\eta_q(A_q) = F_q$. Ker je

$$\eta_q(a_{i(j+1)}) \equiv \eta_{q+1}(a_{i(j+1)}) \pmod{F_q}$$

in $\eta_{q+1}(a_{i(j+1)}) = \eta_q(y_{ij}^{-1}a_{i0}y_{ij})$, dobimo za vsaka $i \in \mathbb{Z}_n$, $j \in \mathbb{Z}_{m_i} \setminus \{m_i - 1\}$ kongruenco

$$\eta_q(r'_{ij}) = \eta_q(a_{i(j+1)}^{-1}y_{ij}^{-1}a_{i0}y_{ij}) \equiv \eta_q(a_{i(j+1)})^{-1}\eta_q(a_{i(j+1)}) \equiv 1 \pmod{F_q}.$$

Potem lahko relacije $\eta_q(r'_{ij})$ za $j < m_i - 1$ izrazimo s preostalimi relacijami. Za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$ definiramo $\beta_i := \eta_q(y_{i(m_i-1)})$ in $\alpha_i := a_{i0}$ ter izračunamo

$$\eta_q(r'_{i(m_i-1)}) = \eta_q(a_{i0}^{-1}y_{i(m_i-1)}^{-1}a_{i0}y_{i(m_i-1)}) = \alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}\alpha_i\beta_i.$$

Potem smo konstruirali predstavitev

$$\frac{G}{G_q} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], F_q \rangle$$

in pokazali, da komutira diagram (na katerem so π_A , π_G in π_F kanonični epimorfizmi):

$$\begin{array}{ccccc} \langle a_{ij} \rangle & \xlongequal{\quad} & A & \xrightarrow[\ker=R']{\pi_A} & G \xlongequal{\quad} \langle a_{ij} \mid r'_{ij} \rangle \\ & & \eta_q \updownarrow & & \downarrow \pi_G \\ \langle a_{i0} \rangle & \xlongequal{\quad} & F & \xrightarrow[\ker=\langle r'_{i(m_i-1)} \mid i \in \mathbb{Z}_n \rangle F_q]{\pi_F} & \frac{G}{G_q} \xlongequal{\quad} \langle a_{i0} \mid r'_{i(m_i-1)}, F_q \rangle \end{array}$$

Iz konstrukcije Wirtingerjeve prezentacije sledi, da generator $\alpha_i = a_{i0}$ ustreza poldnevniku i -te komponente spleta L v grupi G in torej tudi v $\frac{G}{G_q}$. Podobno produkt $y_{i(m_i-1)}$ ustreza vzporedniku i -te komponente spleta L v grupi G . Potem $\beta_i = \eta_q(y_{i(m_i-1)})$ ustreza vzporedniku i -te komponente spleta L v grupi $\frac{G}{G_q}$. $\square$

Predstavitev je v večini primerov relativno preprosta za izračun. Poglejmo si nekaj nazornih primerov.

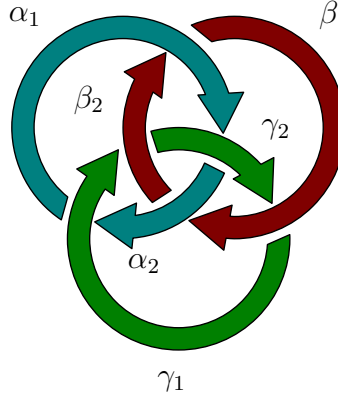
Primer 5.10. Naj bo L trivialen n -splet v $\mathbb{R}^3$. V primeru 1.35 smo pokazali, da je njegova fundamentalna grupa ravno prosta grupa na n generatorjih $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki so ravno poldnevnik paroma različnim komponentam. Jasno je, da lahko vsak vzporednik predstavimo s trivialno zanko. Potem imamo predstavitev

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_q \rangle.$$

Iz primera 2.10 vemo, da ta grupa ni prosta in ni trivialna. $\diamond$

Primer 5.11. Naj bodo L boromejski obroči v $\mathbb{R}^3$ in naj slika 28 predstavlja izbrani diagram L . Potem imamo za fundamentalno grupo spleta Wirtingerjevo prezentacijo z generatorji $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ in relacijami

$$\begin{aligned} A_1 : \alpha_1 \gamma_2^{-1} \alpha_2^{-1} \gamma_2, & & A_2 : \alpha_2 \gamma_1 \alpha_1^{-1} \gamma_1^{-1}, \\ B_1 : \beta_1 \alpha_2^{-1} \beta_2^{-1} \alpha_2, & & B_2 : \beta_2 \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}, \\ C_1 : \gamma_1 \beta_2^{-1} \gamma_2^{-1} \beta_2, & & C_2 : \gamma_2 \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1}. \end{aligned}$$



Slika 28: Diagram boromejskih obročev z označenimi loki.

Z relacijami A_2, B_2 in C_2 izrazimo

$$\alpha_2^{-1} = \gamma_1 \alpha_1^{-1} \gamma_1^{-1}, \quad \beta_2^{-1} = \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}, \quad \gamma_2^{-1} = \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1}.$$

Po trditvi 3.8 lahko za vzporednike vzamemo

$$\begin{aligned} v_1 &= \gamma_2^{-1} \gamma_1 = \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \gamma_1, \\ v_2 &= \alpha_2^{-1} \alpha_1 = \gamma_1 \alpha_1^{-1} \gamma_1^{-1} \alpha_1, \\ v_3 &= \beta_2^{-1} \beta_1 = \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1. \end{aligned}$$

Potem imamo Chen-Milnorjevo predstavitev (izrek 5.8) za vsak $q \in \mathbb{N}$:

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \mid [\alpha_1, v_1], [\beta_1, v_2], [\gamma_1, v_3], \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle_q \right\rangle.$$

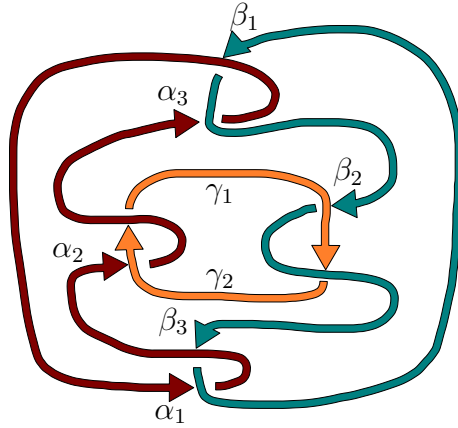
◇

Primer 5.12. Naj bo L splet v $\mathbb{R}^3$ iz primera 3.9 (diagram spleta je prikazan na sliki 29). Z uporabo Wirtingerjeve prezentacije lahko izrazimo fundamentalno grupo spleta L z generatorji $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ in relacijami

$$\begin{aligned} A_1 : \alpha_1 \beta_1 \alpha_2^{-1} \beta_1^{-1}, & & A_2 : \alpha_2 \gamma_2^{-1} \alpha_3^{-1} \gamma_2, & & A_3 : \alpha_3 \beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_2^{-1}, \\ B_1 : \beta_1 \alpha_1 \beta_2^{-1} \alpha_1^{-1}, & & B_2 : \beta_2 \gamma_1^{-1} \beta_3^{-1} \gamma_1, & & B_3 : \beta_3 \alpha_2 \beta_1^{-1} \alpha_2^{-1}, \\ C_1 : \gamma_1 \beta_3^{-1} \gamma_2^{-1} \beta_3, & & C_2 : \gamma_2 \alpha_3^{-1} \gamma_1^{-1} \alpha_3. \end{aligned}$$

Pokazali smo že (primer 3.9), da ima splet poldnevnik α_1, β_1 in γ_1 ter vzporednike

$$v_1 = \beta_1 \gamma_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1}, \quad v_2 = \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_2 \beta_1^{-1}, \quad v_3 = \beta_3^{-1} \alpha_3^{-1} \gamma_1^2.$$



Slika 29: Diagram 3-spleta L .

Z relacijami dobimo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \beta_1 \gamma_2^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \stackrel{C_1}{=} \beta_1 (\beta_3 \gamma_1^{-1} \beta_3^{-1}) \beta_2 \alpha_1^{-1} \stackrel{B_2}{=} \beta_1 (\gamma_1 \beta_2 \gamma_1^{-1}) \gamma_1^{-1} (\gamma_1 \beta_2^{-1} \gamma_1^{-1}) \beta_2 \alpha_1^{-1} = \\
&= \beta_1 \gamma_1 \beta_2 \gamma_1^{-1} \beta_2^{-1} \gamma_1^{-1} \beta_2 \alpha_1^{-1} \stackrel{B_1}{=} \beta_1 \gamma_1 (\alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1) \gamma_1^{-1} (\alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1) \gamma_1^{-1} (\alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1) \alpha_1^{-1} = \\
&= \beta_1 \gamma_1 \alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1 \\
v_2 &= \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_2 \beta_1^{-1} \stackrel{A_1}{=} \alpha_1 \gamma_1^{-1} (\beta_1^{-1} \alpha_1 \beta_1) \beta_1^{-1} = \alpha_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \\
v_3 &= \beta_3^{-1} \alpha_3^{-1} \gamma_1^2 \stackrel{B_2}{=} (\gamma_1 \beta_2^{-1} \gamma_1^{-1}) \alpha_3^{-1} \gamma_1^2 \stackrel{A_3}{=} \gamma_1 \beta_2^{-1} \gamma_1^{-1} (\beta_2 \alpha_1^{-1} \beta_2^{-1}) \gamma_1^2 \stackrel{B_1}{=} \\
&\stackrel{B_1}{=} \gamma_1 (\alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1) \gamma_1^{-1} (\alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1) \alpha_1^{-1} (\alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1) \gamma_1^2 = \\
&= \gamma_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^2
\end{aligned}$$

S tem smo vzporednike v_1 , v_2 in v_3 izrazili v poldnevnikih α_1 , β_1 in γ_1 , ki jih lahko vzamemo za generatorje v Chen-Milnorjevi predstavitvi. Po izreku 5.8 imamo za poljuben $q \in \mathbb{N}$ predstavitev

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \mid [\alpha_1, v_1], [\beta_1, v_2], [\gamma_1, v_3], \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle_q \right\rangle.$$

◇

5.4 Spletna grupa spleta v evklidskem prostoru

Za zaključek poglavja si bomo ogledali obljubljeni povezavo med spletno grupo spleta v evklidskem prostoru ter grupami $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)}$. Izkaže se, da lahko spletno grupo izrazimo kot kvocient ene od teh grup.

Trditev 5.13 ([11]). *Za n -splet L v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$ je spletna grupa $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ kvocient grupe*

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)}.$$

Dokaz trditve 5.13. Dokazali bomo ekvivalentno trditev: Če je L n -splet v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$, potem je $\mathcal{G}_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)$ trivialna.

Trditev dokažemo z indukcijo na n . Če je $n = 0$, potem so vse grupe trivialne in je trditev očitna. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo, da trditev drži za vse $(n-1)$ -splete v $\mathbb{R}^3$. Potem za vsak $i = 1, \dots, n$ velja

$$\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^3 - L^i) \cong \left(\frac{\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)}{\mathcal{A}_i} \right)_n = 1.$$

Torej je $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^3 - L)$ vsebovana v vseh $\mathcal{A}_i$. Po definiciji spletne grupe so te grupe komutativne. Sledi, da $\mathcal{G}_n(\mathbb{R}^3 - L)$ komutira z vsemi elementi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$, saj $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ generirajo grupo $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$. Potem pa je

$$\mathcal{G}_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L) = \left[\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L), \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^3 - L) \right] = 1.$$

Spletna grupa $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ je potem res kvocient grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)}$, saj jo lahko zapišemo kot

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) = \frac{\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)}{\mathcal{G}_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)} = \frac{\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{[A_1] \dots [A_n]}}{\left(\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{[A_1] \dots [A_n]} \right)_{n+1}} = \frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)[A_1] \dots [A_n]}.$$

□

Iz trditve 5.13 in Chen-Milnorjeve predstavitve lahko potem za spletno grupo v evklidskem prostoru dobimo izrecno prezentacijo.

Izrek 5.14 ([11]). *Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Potem imamo za spletno grupo $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ predstavitev*

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) = \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \left| [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], E \right. \right\rangle,$$

kjer sta za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ generator α_i poldnevnik i -te komponente spleta L in β_i beseda v $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki predstavlja vzporednik i -te komponente spleta L . Poleg tega je

$$E = \left\langle [\alpha_i, \alpha_i^\lambda] \left| i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \right. \right\rangle.$$

Opomba: kot pri izreku 5.8, predstavitev temelji na izbranem diagramu spleta.

Dokaz izreka 5.14. Dokaz izreka sledi iz Chen-Milnorjeve predstavitve (izrek 5.8) in trditve 5.13. Iz trditve 5.13 vemo, da je

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) = \frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)[A_1] \dots [A_n]}.$$

Če za $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3 - L)}$ uporabimo Chen-Milnorjevo predstavitev (izrek 5.8), dobimo za $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ predstavitev

$$\left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \left| [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], F_{n+1}, [A_1], \dots, [A_n] \right. \right\rangle,$$

kjer sta za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ generator α_i poldnevnik i -te komponente spleta L in β_i beseda v $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, ki predstavlja vzporednik i -te komponente spleta L , ter F prosta grupa na n generatorjih $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, F_{n+1} pa $(n+1)$ -ti člen njenega spodnjega centralnega zaporedja.

Opazimo, da je $[A_i] \subseteq E$ za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$, saj je po trditvi 4.19 $A_i = \langle \alpha_i \rangle$, torej je A_i generirana ravno s konjugirani α_i^λ za vsak $\lambda \in G(M-L)$. Obratno, naj bo $[\alpha_i, \alpha_i^\lambda] \in E$. Potem je $[\alpha_i, \alpha_i^\lambda] \in [A_i]$, saj je $A_i \trianglelefteq G(M-L)$ in je torej $\alpha_i^\lambda \in A_i$. Relacije $[A_1], \dots, [A_n]$ so torej ekvivalentne relacijam E .

Pokazati moramo še, da so relacije F_{n+1} vsebovane v dobljeni predstavitvi. Ekvivalentno, pokazati moramo, da je

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], E \right\rangle_{n+1} &= \\ \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], [A_1], \dots, [A_n] \right\rangle_{n+1} &= 1. \end{aligned}$$

To pa smo že pokazali v dokazu trditve 5.13. Potem imamo za $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ res predstavitev

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) = \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid [\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n], E \right\rangle.$$

□

V večini primerov lahko za spletno grupo vzamemo kar Chen-Milnorjevo predstavitev in le spremenimo nekaj relacij.

Primer 5.15. Naj bo L trivialen n -splet v $\mathbb{R}^3$. V primeru 5.10 smo pokazali, da je

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_q \right\rangle.$$

Potem imamo za $G = \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ predstavitev

$$G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid E = \{[\alpha_i, \alpha_i^\lambda] \mid \lambda \in \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle, i = 1, \dots, n\} \rangle.$$

To grupo pogosto imenujemo reducirana prosta grupa. ◇

Primer 5.16. Predstavitvi, dobljeni s Chen-Milnorjevo predstavitvijo v primerih 5.11 in 5.12, lahko preprosto modificiramo do predstavitev spletnih grup, s tem da relacije $\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle_q$ zamenjamo z relacijami

$$E = \left\langle [\alpha_1, \alpha_1^\lambda], [\beta_1, \beta_1^\lambda], [\gamma_1, \gamma_1^\lambda]; \lambda \in \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle \right\rangle.$$

◇

6 Milnorjeve številske invariante

Prišli smo do točke, kjer lahko končno definiramo tako imenovane Milnorjeve invariante, oziroma Milnorjeve številske invariante. Milnor je invariante v precej drugačni obliki definirali že v članku »Link groups« [11], potem pa podal bolj koherentno in robustno definicijo v članku »Isotopy of links« [10]. Invariante posplošijo spletno število, kot bomo videli na začetku zadnjega poglavja. Njihov namen je zaznati prepletanje višjega reda, ki se pojavi v primerih, kot so boromejski obroči (primer 1.28). Njihova obravnava je zelo prikladna, saj se izražajo kot cela števila.

6.1 $\bar{\mu}$ koeficienti

Definicija omenjenih invariant izhaja iz Chen-Milnorjeve predstavitve, v kateri izberemo predstavnike specifičnih poldnevnikov.

Definicija 6.1 (μ koeficienti). Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru. Za splet L si izberemo diagram in z njim za poljuben $q \in \mathbb{N}$ dobimo Chen-Milnorjevo predstavitev (izrek 5.8) grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$. Naj bo $\beta_j \in \frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ vzporednik j -te komponente spleta L s spletnim številom $\text{lk}(\beta_j, L_j) = 0$ in naj bo $M(\beta_j) \in \mathbb{Z}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ njegova Magnusova razširitev, ki jo formalno dobimo kot Magnusovo razširitev besede β_j v prosti grupi, generirani s poldnevniki komponent spleta L .

Definiramo $\mu_L(i_1 \dots i_p j)$ koeficiente kot koeficiente v $M(\beta_j)$ pred monomom $X_{i_1} \dots X_{i_p}$, oziroma

$$M(\beta_j) = 1 + \sum_{i_1 i_2 \dots i_p} \mu_L(i_1 i_2 \dots i_p j) X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}.$$

Dve opombi:

- Po dogovoru je $\mu_L(j) = 0$ za vsak $j \in \{1, \dots, n\}$.
- Pogosto bomo označili $I = i_1 \dots i_p j$ in pisali $\mu_L(i_1 \dots i_p j) = \mu_L(I)$. Kasneje bomo tudi izpustili indeks j , saj bo njegovo vlogo prevzel indeks i_p .

Pred nadaljevanjem si oglejmo preprost primer.

Primer 6.2. Za splet L vzemimo boromejske obročje v $\mathbb{R}^3$. Spomnimo se primera 5.11, kjer smo pokazali, da imamo za poljuben $q \in \mathbb{N}$ predstavitev

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \mid [\alpha_1, v_1], [\beta_1, v_2], [\gamma_1, v_3], \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle_q \right\rangle,$$

kjer je

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \gamma_1, \\ v_2 &= \gamma_1 \alpha_1^{-1} \gamma_1^{-1} \alpha_1, \\ v_3 &= \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1. \end{aligned}$$

Vzemimo vzporednik $v_1 = \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \gamma_1$, ki smo ga dobili s postopkom iz trditve 3.8. Potem je $\text{lk}(v_1, L_1) = 0$. Potem lahko izračunamo

$$\begin{aligned} M(v_1) &= (1 + X_2)(1 - X_3 + X_3^2 \pm \dots)(1 - X_2 + X_2^2 \pm \dots)(1 + X_3) \\ &= 1 - X_2 X_3 + X_3 X_2 \pm \dots \end{aligned}$$

V tej razširitvi je $\mu_L(231) = -1$ koeficient pred monomom $X_2 X_3$ in $\mu_L(321) = 1$ koeficient pred monomom $X_3 X_2$. Opazimo, da v razširitvi ni nobenega faktorja, ki vsebuje X_1 , torej je koeficient $\mu_L(1231) = 0$, saj gre za koeficient pred monomom $X_1 X_2 X_3$.

Oglejmo si še

$$v'_1 = v_1 \cdot [v_1, \alpha_1^{-1}] = v_1 v_1^{-1} \alpha_1 v_1 \alpha_1^{-1} = \alpha_1 \beta_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \gamma_1 \alpha_1^{-1}$$

V grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ je $v_1 = v'_1$, saj iz relacije $[\alpha_1, v_1] = 1$ sledi $[v_1, \alpha_1^{-1}] = 1$. Če vzamemo razširitev

$$\begin{aligned} M(v'_1) &= \\ &= (1 + X_1)(1 + X_2)(1 - X_3 + X_3^2 \pm \dots)(1 - X_2 \pm \dots)(1 + X_3)(1 - X_1 \pm \dots) = \\ &= 1 - X_2X_3 + X_3X_2 - X_1X_2X_3 \pm \dots, \end{aligned}$$

lahko opazimo, da v njej nastopi monom $X_1X_2X_3$, kar pomeni, da je v tej razširitvi $\mu_L(1231') = -1 \neq 0$. Torej so μ_L koeficienti odvisni od izbire vzporednika in predstavitev tega vzporednika v grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$. $\diamond$

Iz primera 6.2 direktno sledi naslednja ugotovitev:

Trditev 6.3. *Za spleto L v evklidskem prostoru $\mu_L(i_1 \dots i_{p,j})$ koeficienti v splošnem niso invariante za ambientno izotopijo.*

Za pridobitev invariant bomo morali definirati bolj ostre koeficiente. Začnimo z definicijo Δ koeficientov.

Definicija 6.4 ($\Delta(I)$ koeficienti). Naj bo L n -sploj v evklidskem prostoru in I končno zaporedje elementov množice $\{1, \dots, n\}$ dolžine vsaj 2. Naj bo Ω množica vseh cikličnih permutacij pravih podzaporedij zaporedja I .

Potem definiramo $\Delta_L(I)$ kot največji skupni delitelj vseh koeficientov $\mu_L(I')$ za $I' \in \Omega$, oziroma

$$\Delta_L(I) = \gcd_{I' \in \Omega} \{\mu_L(I')\}.$$

Število zaporedij v $\Omega(I)$ raste zelo hitro z dolžino zaporedja I . Za nazor si oglejmo naslednji primer.

Primer 6.5. Naj bo $I = 1234$ zaporedje štirih elementov iz množice $\{1, 2, 3, 4\}$. Potem je

$$\begin{aligned} \Omega(I) = \{ &123, 231, 312, 124, 241, 412, 134, 341, 413, \\ &12, 21, 13, 31, 23, 32, 14, 41, 24, 42, 34, 43 \}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Na podlagi μ in Δ koeficientov lahko definiramo nove koeficiente, ki jih bomo označili z $\bar{\mu}$.

Definicija 6.6 ($\bar{\mu}$ koeficienti). Naj bo L n -sploj v evklidskem prostoru in I končno zaporedje elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Izberemo si nek diagram spleta L . Definiciji 6.1 in 6.4 nam določata celoštevilsko koeficienta $\mu_L(I)$ in $\Delta_L(I)$. Definiramo koeficient $\bar{\mu}_L(I)$ kot ostanek $\mu_L(I)$ pri deljenju z $\Delta_L(I)$, oziroma

$$\bar{\mu}_L(I) := \mu_L(I) \pmod{\Delta_L(I)}.$$

Pri tem definiramo dolžino $\bar{\mu}_L$ koeficienta kot dolžino zaporedja I .

Opomba: če so vsi μ_L koeficienti dolžine $< k$ ničelni, so $\bar{\mu}_L$ koeficienti dolžine k ravno μ_L koeficienti.

Za trenutek še počakajmo s primeri, ter dokažimo dva ključna izreka, ki nam osmislita definicijo $\bar{\mu}$ koeficientov.

6.2 Invarianta za ambientno izotopijo

Naslednji izrek nam pove, da so $\bar{\mu}$ koeficienti invariante za ambientno izotopijo. Kot pri izreku 5.4 so $\bar{\mu}$ koeficienti v resnici invariante za izotopijo, vendar se bomo mi s primeri osredotočili na ambientno izotopijo, poseben primer izotopije.

Izrek 6.7 (Milnor [10]). *Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru, $p < q$ naravni števili in $i_1 \dots i_{pj}$ končno zaporedje elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Naj bo $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ koeficient iz definicije 6.6, ki ga dobimo iz Chen-Milnorjeve predstavitve grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$. Potem je $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ invarianta za ambientno izotopijo in neodvisen od q .*

Dokaz izreka 6.7. Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru, $q, p \in \mathbb{N}$, $p < q$ in $i_1 \dots i_{pj}$ končno zaporedje elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Izberemo si diagram spleta L in na podlagi njega za vsak $k \in \{1, \dots, n\}$ definiramo α_k kot poldnevnik k -te komponente spleta L in generator grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ v Chen-Milnorjevi predstavitvi (izrek 5.8) in β_k kot vzporednik k -te komponente spleta L v grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ s spletnim številom 0 z L_k . Preveriti moramo naslednje štiri trditve:

- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ se ne spremeni ob konjugaciji β_j .
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ se ne spremeni ob konjugaciji kateregakoli od α_k .
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ se ne spremeni ob množenju β_j s katerokoli relacijo $[\alpha_k, \beta_k]$.
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$ se ne spremeni ob množenju β_j s katerokoli relacijo F_q .

Dokaz bomo podali z indukcijo na q . Za $q = 1$ izrek očitno drži, saj je koeficient $\bar{\mu}_L(j) = 0$ neodvisen od β_j . Naj bo torej $q > 1$ in predpostavimo, da je $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{q-1}j)$ invarianta za ambientno izotopijo za vsako zaporedje $i_1 \dots i_{q-1}j$ elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Naj bo $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ algebra nekomutativnih formalnih potenčnih vrst. Oglejmo si množico

$$\left\{ \sum_{i_1 \dots i_p} \nu(i_1 \dots i_p) X_{i_1} \dots X_{i_p} \in \mathcal{A} \mid \forall p < q : \nu(i_1 \dots i_p) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_{pj})} \right\},$$

ki jo bomo označili z $D_j \subset \mathcal{A}$. Potem za vzporednika β_j in β'_j dobimo isti koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{pj})$, natanko tedaj, ko je $M(\beta_j) - M(\beta'_j) \in D_j$. Opazimo, da je D_j določena z $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_{p-1}j)$ za $p < q$, torej lahko z uporabo induksijske predpostavke sklepamo, da je neodvisna od sprememb, ki jih inducira ambientna izotopija, torej sprememb, ki smo jih našli zgoraj.

Pokažimo, da je D_j dvostranski ideal v $\mathcal{A}$. Očitno je zaprt za seštevanje. Naj bo $\nu(i_1 \dots i_p) X_{i_1} \dots X_{i_p}$ monom vrste iz D_j in $\lambda X_{k_1} \dots X_{k_r}$ monom poljubne vrste v $\mathcal{A}$. Potem za $p < q$ velja:

$$\begin{aligned} \text{ker je} & \quad \nu(i_1 \dots i_p) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_{pj})} \\ \text{in} & \quad \Delta_L(i_1 \dots i_{pj}) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(k_1 \dots k_r i_1 \dots i_{pj})}, \\ \text{potem je} & \quad \lambda \nu(i_1 \dots i_p) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(k_1 \dots k_r i_1 \dots i_{pj})}. \end{aligned}$$

Torej je D_j levi ideal. Podoben argument nam pokaže, da je D_j tudi desni ideal.

Sedaj pokažimo, da za $M(\beta_j) = 1 + \omega_j$ in poljuben $k \in \{1, \dots, n\}$ velja

$$\omega_j X_k \equiv X_k \omega_j \equiv 0 \pmod{D_j}.$$

Naj bo $\mu_L(i_1 \dots i_p j) X_{i_1} \dots X_{i_p}$ monom vrste v $M(\beta_j)$. Potem imamo

$$\begin{aligned} \mu_L(i_1 \dots i_p j) &\equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_p k j)} \\ \implies \mu_L(i_1 \dots i_p j) X_{i_1} \dots X_{i_p} X_k &\equiv 0 \pmod{D_j}. \end{aligned}$$

Enako velja tudi za množenje z druge strani. Podobno dobimo

$$\begin{aligned} \mu_L(i_1 \dots i_p j) &\equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_t k i_{t+1} \dots i_p j)} \\ \implies \mu_L(i_1 \dots i_p j) X_{i_1} \dots X_{i_t} X_k X_{i_{t+1}} X_{i_p} &\equiv 0 \pmod{D_j}. \end{aligned}$$

Naj bo $k \neq j$ poljuben in $M(\beta_k) = 1 + \omega_k$. Potem velja

$$\omega_k X_k \equiv X_k \omega_k \equiv 0 \pmod{D_j},$$

saj za poljuben monom $\mu_L(i_1 \dots i_p k) X_{i_1} \dots X_{i_p}$ iz ω_k

$$\begin{aligned} \text{iz} \quad & \mu_L(i_1 \dots i_p k) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_p k j)} \\ \text{in} \quad & \mu_L(i_1 \dots i_p k) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(k i_1 \dots i_p j)} \\ \text{sledi} \quad & \mu_L(i_1 \dots i_p k) X_{i_1} \dots X_{i_p} X_k \equiv 0 \pmod{D_j} \\ \text{in} \quad & \mu_L(k i_1 \dots i_p) X_k X_{i_1} \dots X_{i_p} \equiv 0 \pmod{D_j}. \end{aligned}$$

Pokažimo še, da je

$$M(F_q) \equiv 1 \pmod{D_j}.$$

Kongruenca sledi iz dejstva, da po izreku 2.9 Magnusova razširitev q -tega elementa spodnjega centralnega zaporedja grupe vsebuje le monome stopnje večje ali enake q , izvzemši konstantni faktor 1.

Sedaj lahko dokažemo naše trditve. Invarianca $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ na množenje β_j z relacijami F_q sledi direktno iz dejstev, da je D_j dvostranski ideal in da so Magnusove razširitve F_q trivialne modulo D_j .

Recimo, da bi β_j , za katerega je $M(\beta_j) = 1 + \omega_j$, konjugirali z α_k . Potem je

$$\begin{aligned} M(\alpha_k^{-1} \beta_j \alpha_k) &= (1 - X_k + X_k^2 - \dots)(1 + \omega_j)(1 + X_k) = \\ &= 1 + \omega_j + \text{monomi, ki vsebujejo faktor } \omega_j X_k \text{ ali } X_k \omega_j \\ &\equiv \omega_j \pmod{D_j}. \end{aligned}$$

Ker $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ generirajo $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)}$, velja enako za konjugacijo s poljubnim elementom. Potem je koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invarianten za konjugacijo besed β_j .

Recimo, da α_k zamenjamo z $\alpha'_k = \alpha_l^{-1} \alpha_k \alpha_l$. Potem je $\alpha_k = \alpha_l \alpha'_k \alpha_l^{-1}$ in imamo enačbo

$$M(\alpha_k) = (1 + X_k) = (1 + X_l)(1 + X'_k)(1 - X_l + X_l^2 - \dots) = M(\alpha_l \alpha'_k \alpha_l^{-1}).$$

Potem je $X_k = X'_k + \text{monomi višje stopnje}$. Izraz vstavimo v razširitev $M(\beta_j)$. Ker smo pokazali

$$\mu_L(i_1 \dots i_p j) X_{i_1} \dots X_{i_t} X_l X_{i_{t+1}} \dots X_{i_p} \equiv 0 \pmod{D_j},$$

nam dobljen izraz vrne isti koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$. Ker $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ generirajo grupo $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$, velja enako za konjugacijo s poljubnim elementom. Torej je koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invarianten za konjugacijo α_k .

Nazadnje, označimo $M(\beta_k) = 1 + \omega_k$. Potem je

$$\begin{aligned} M(\alpha_k^{-1} \beta_k^{-1} \alpha_k \beta_k) &= 1 + M(\alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}) \left(M(\alpha_k \beta_k) - M(\beta_k \alpha_k) \right) = \\ &= 1 + M(\alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}) \left((1 + X_k)(1 + \omega_k) - (1 + \omega_k)(1 + X_k) \right) \\ &= 1 + M(\alpha_k^{-1} \beta_k^{-1}) \left(X_k \omega_k - \omega_k X_k \right) \equiv \\ &\equiv 1 \pmod{D_j}. \end{aligned}$$

Potem je $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invariantna za množenje s komutatorji $[\alpha_k, \beta_k]$.

Ker so generatorji in besede, ki predstavljajo vzporednike v Chen-Milnorjevi predstavitvi iz izreka 5.8, neodvisni od q , so tudi invariante $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p k)$ neodvisne od q , dokler je $p < q$. S tem je naš izrek dokazan. □

Omejitev $p < q$ se izkaže za brezpredmetno, saj lahko vedno vzamemo dovolj velik q , da izračunamo $\bar{\mu}$ invarianto željene dolžine. Navadno to ne bo niti zares spremenilo vzporednikov iz Chen-Milnorjeve predstavitve, ki jih bomo uporabili za izračun invariant, zaradi česar ne bomo izrecno pisali, kateri q smo vzeli.

6.3 Invarianta za spletno homotopijo

Naslednji izrek nam poda analogen rezultat izreku 6.7 za spletno homotopijo, z dodatno omejitvijo glede indeksiranja. Dokaz sloni na dejstvu, da je spletna grupa n -spleta L kvocient grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_{n+1}(\mathbb{R}^3-L)}$, ki smo ga pokazali v trditvi 5.13.

Izrek 6.8 (Milnor [10]). *Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru in $i_1 \dots i_p j$ končno zaporedje paroma različnih elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Naj bo $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ koeficient iz definicije 6.6.*

Potem je $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invarianta za spletno homotopijo.

Opomba: namesto, da vzamemo β_j kot vzporednik j -te komponente spleta L v grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$, lahko vzamemo β_j kot vzporednik j -te komponente spleta L v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$, za katero imamo po izreku 5.14 zelo podobno predstavitev.

Dokaz izreka 6.8. Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru in $i_1 \dots i_p j$ končno zaporedje paroma različnih elementov množice $\{1, \dots, n\}$. Izberemo si diagram spleta L in na podlagi njega za vsak $k \in \{1, \dots, n\}$ definiramo α_k kot poldnevnik k -te komponente spleta L in generator grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ v Chen-Milnorjevi predstavitvi (izrek 5.8) in β_k kot vzporednik k -te komponente spleta L v grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$ s spletnim številom 0 z L_k . Potem sta za vsak $k \in \{1, \dots, n\}$ po izreku 5.14 α_k in β_k tudi

poldnevnik in vzporednik k -te komponente spleta L v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$. Za definicijo $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ bi lahko vzeli kar besede (in razširitve) iz te grupe.

Po izreku 4.17 je $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ invarianta za spletno homotopijo. Dokazati moramo naslednjih pet trditev:

- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ se ne spremeni ob konjugaciji β_j .
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ se ne spremeni ob konjugaciji kateregakoli od α_k .
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ se ne spremeni ob množenju β_j s poljubnim konjugatorjem $[\alpha_k, \beta_k]$.
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ se ne spremeni ob množenju β_j z elementom iz $[A_k]$.
- Koeficient $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ se ne spremeni ob množenju β_j z elementom iz A_j .

Dokazi prvih treh trditev so podobni kot dokazi podobnih trditev v dokazu izreka 6.7. Spomnimo se trditve 4.19, ki pravi, da je $A_k = (\alpha_k)$ za vsak $k \in \{1, \dots, n\}$.

Naj bo $1 + \lambda$ Magnusova razširitev poljubnega netrivialnega elementa iz $[(\alpha_k)]$. Potem po izreku 2.9 monom v λ vsebuje faktor X_k vsaj dvakrat. Ker so $i_1 \dots i_p j$ paroma različni, je $\mu_L(i_1 \dots i_p j)$ koeficient v $M(\beta_j)$ pred monomom $X_{i_1} \dots X_{i_p}$ paroma različnih spremenljivk X_k . Potem množenje $M(\beta_j)$ z $1 + \lambda$ ne spremeni teh koeficientov in je torej $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invariantna za množenje β_j z elementi $[(\alpha_k)]$.

Naj bo $1 + \lambda'$ Magnusova razširitev poljubnega netrivialnega elementa iz (α_j) . Potem vsak monom v λ' vsebuje faktor X_j . Ker so $i_1 \dots i_p j$ paroma različni, je $\mu_L(i_1 \dots i_p j)$ koeficient v $M(\beta_j)$ pred monomom, ki ne vsebuje spremenljivke X_j . Potem množenje z $1 + \lambda'$ ne spremeni teh koeficientov in je torej $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invariantna za množenje β_j z elementi (α_j) .

Torej je $\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j)$ invarianta za spletno homotopijo. S tem je izrek dokazan. $\square$

6.4 Lastnosti $\bar{\mu}$ invariant

Preden nadaljujemo s primeri, si oglejmo še tri pomembne računske lastnosti $\bar{\mu}$ invariant, ki jih bomo redno uporabljali. Prva nam pove, da nam sprememba orientacije spleta spremeni kvečjemu predznak $\bar{\mu}$ invariant.

Trditev 6.9 ([10]). *Naj bosta L in L' spleta v evklidskem prostoru. Če je splet L' enak spletu L z obratno orientacijo i -te komponente, je $\bar{\mu}_{L'}(I) = (-1)^{\#(i,I)} \bar{\mu}_L(I)$, kjer je $\#(i, I)$ število pojavitev elementa i v I .*

Dokaz trditve 6.9. Naj bosta L in L' taka spleta v evklidskem prostoru, da je splet L' enak spletu L z obratno orientacijo i -te komponente. Potem za izbran diagram spleta L iz Chen-Milnorjeve predstavitve (izrek 5.8) grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)}$ dobimo predstavitev grupe $\frac{G(\mathbb{R}^3 - L')}{G_q(\mathbb{R}^3 - L')}$ tako, da generator α_i v L , poldnevnik i -te komponente spleta L , zamenjamo z generatorjem α_i^{-1} . V Magnusovi razširitvi vzporednika β_j se ta sprememba izrazi tako, da spremenljivko X_i zamenjamo z $-X_i$, medtem ko se v Magnusovi razširitvi β_i vsi netrivialni monomi pomnožijo z -1 . Potem je res

$$\bar{\mu}_{L'}(I) = (-1)^{\#(i,I)} \bar{\mu}_L(I).$$

$\square$

Druga trditev nam dovoli, da v večini primerov računamo invariante v razširitvi vzporednika, ki ima najpreprostejšo obliko. Prav zaradi nje zadnjega indeksa ne bomo označevali ločeno.

Trditev 6.10 ([10]). *Za splet L v evklidskem prostoru in končno zaporedje $i_1 \dots i_p j$ elementov množice $\{1, \dots, n\}$ velja:*

$$\bar{\mu}_L(i_1 \dots i_p j) = \bar{\mu}_L(j i_1 \dots i_p).$$

Dokaz trditve 6.10. Naj bo $q \in \mathbb{N}$, L n -splet v $\mathbb{R}^3$, in naj bo m_i število lokov (ki je enako številu križišč) i -te komponente L_i nekega izbranega diagrama spleta L . Potem imamo za ta diagram Wirtingerjevo prezentacijo grupe $G(\mathbb{R}^3 - L)$ z generatorji a_{ij} in relacijami r_{ij} za vsaka $i \in \mathbb{Z}_n$ in $j \in \mathbb{Z}_{m_i}$. Naj bosta

$$A = \langle a_{ij} \mid i \in \mathbb{Z}_n, j \in \mathbb{Z}_{m_i} \rangle \text{ in } F = \langle a_{i0} \mid i \in \mathbb{Z}_n \rangle$$

prosta grupa in njena prosta podgrupa in naj bo za vsak $q \in \mathbb{N}$

$$\eta_q : A \rightarrow F$$

homomorfizem, definiran v dokazu izreka 5.8. Trditev 1.38 pravi, da obstaja za vsaka $i \in \mathbb{Z}_n$ in $j \in \mathbb{Z}_{m_i}$ element $\lambda_{ij} \in A$, tako da imamo v grupi A enakost

$$\prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{m_i-1} (r_{ij}^{\lambda_{ij}}) = 1. \quad (6.1)$$

Vemo, da je za $1 \leq j < m_i$

$$\eta_q(r_{ij}) \equiv 1 \pmod{F_q}$$

in da za $\alpha_i = \eta_q(a_{i0}) = a_{i0}$ in $\beta_i = \eta_q(y_{i(m_i-1)})$ velja

$$\eta_q(r_{i(m_i-1)}) \equiv \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \alpha_i \beta_i = [\alpha_i, \beta_i] \pmod{F_q}.$$

Naj bo $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\langle\langle X_1, \dots, X_n \rangle\rangle$ algebra nekomutativnih formalnih potenčnih vrst. Z D označimo njeno podmnožico

$$\left\{ \sum_{i_1 \dots i_p} \nu(i_1 \dots i_p) X_{i_1} \dots X_{i_p} \in \mathcal{A} \mid \forall p < q : \nu(i_1 \dots i_p) \equiv 0 \pmod{\Delta_L(i_1 \dots i_p)} \right\}.$$

Naj bo $M(\beta_i) = 1 + \omega_i$ za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$. Potem je

$$X_k(X_i \omega_i) \equiv X_k(\omega_i X_i) \equiv (X_i \omega_i) X_k \equiv (\omega_i X_i) X_k \equiv 0 \pmod{D}$$

za vsak X_k , iz česar sledi

$$\begin{aligned} M([\alpha_i, \beta_i]^{\lambda_i}) &= 1 + M(\lambda_i^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}) \left(M(\alpha_i \beta_i) - M(\beta_i \alpha_i) \right) M(\lambda_i) = \\ &= 1 + M(\lambda_i^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}) \left((1 + X_i)(1 + \omega_i) - (1 + \omega_i)(1 + X_i) \right) M(\lambda_i) = \\ &= 1 + M(\lambda_i^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}) \left(X_i \omega_i - \omega_i X_i \right) M(\lambda_i) \equiv \\ &\equiv 1 + (X_i \omega_i - \omega_i X_i) \pmod{D} \end{aligned}$$

Ker je $F_q \equiv 1 \pmod{D}$, dobimo z uporabo enačbe 6.1 enakost

$$\begin{aligned} 1 &\equiv M\left(\prod [\alpha_i, \beta_i]^{\lambda_i}\right) \equiv \prod (1 + (X_i \omega_i - \omega_i X_i)) \pmod{D} \\ &\equiv 1 + \sum (X_i \omega_i - \omega_i X_i) \pmod{D}. \end{aligned}$$

Ker je $\omega_j = \sum_{i_1, \dots, i_p} \mu_L(i_1 \dots i_p j) X_{i_1} \dots X_{i_p}$, je

$$\sum_{i_1, \dots, i_p, j} \mu_L(i_1 \dots i_p j) (X_j X_{i_1} \dots X_{i_p} - X_{i_1} \dots X_{i_p} X_j) \equiv 0 \pmod{D}.$$

Koeficienti v tem izrazu so $\mu_L(i_1 \dots i_p j) - \mu_L(j i_1 \dots i_p)$. Potem je

$$\mu_L(i_1 \dots i_p j) \equiv \mu_L(j i_1 \dots i_p) \pmod{\Delta_L(j i_1 \dots i_p)},$$

s čimer je trditev dokazana. □

Zadnja trditev izhaja iz kombinatoričnih lastnosti Magnusove razširitve in nam določa močno relacijo med invariantami iste dolžine.

Trditev 6.11 ([10]). *Za spleto L v evklidskem prostoru, končni zaporedji I in I' elementov $\{1, \dots, n\}$ in poljuben $k \in \{1, \dots, n\}$ je*

$$\sum_{H \in PS(I, I')} \bar{\mu}_L(Hk) \equiv 0 \pmod{\gcd\{\Delta_L(Hk) \mid H \in PS(I, I')\}},$$

kjer je $PS(I, I')$ množica pravih mešanj zaporedij I in I' (definicija 2.4).

Dokaz trditve 6.11. Uporabimo izrek 2.6 za Magnusovo razširitev vzporednika k -te komponente spleta L in dobimo

$$\mu_L(Ik) \mu_L(I'k) = \sum_{H \in S(I, I')} \mu_L(Hk).$$

Leva stran enakosti je po modulu $\gcd\{\Delta_L(Hk) \mid H \in PS(I, I')\}$ kongruentna 0, na desni strani pa je vsak člen, ki ni rezultat pravega mešanja zaporedij I in I' , kongruenten 0. To konča dokaz trditve. □

Za konec poglavja si oglejmo še primer uporabe teh računskih lastnosti.

Primer 6.12. Kot primer uporabe zgornjih enakosti pokažimo, da vsaka $\bar{\mu}$ invarianta dolžine tri s paroma različnimi indeksi določa vse ostale. Po trditvi 6.10 je za spleto L v evklidskem prostoru

$$\bar{\mu}_L(123) = \bar{\mu}_L(231) = \bar{\mu}_L(312) \text{ in } \bar{\mu}_L(132) = \bar{\mu}_L(321) = \bar{\mu}_L(213),$$

po trditvi 6.11 pa je

$$0 = \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}} \bar{\mu}_L(i_1 i_2 i_3) = 3\bar{\mu}_L(123) + 3\bar{\mu}_L(321),$$

iz česar sledi

$$\bar{\mu}_L(123) = -\bar{\mu}_L(321).$$

Če združimo ti dve enačbi, dobimo

$$\bar{\mu}_L(123) = \bar{\mu}_L(231) = \bar{\mu}_L(312) = -\bar{\mu}_L(132) = -\bar{\mu}_L(321) = -\bar{\mu}_L(213).$$

◇

7 Rezultati, primeri in nevšečnosti

V zadnjem poglavju se bomo osredotočili na primere uporabe Milnorjevih $\bar{\mu}$ invariant ter nekaj rezultatov, ki jih lahko z njimi pokažemo.

7.1 Spletno število je $\bar{\mu}$ invarianta

Začnimo z utemeljitvijo, zakaj lahko $\bar{\mu}$ invariante dojemamo kot posplošitve spletnega števila.

Trditev 7.1. *Spletno število je $\bar{\mu}$ invarianta.*

Dokaz trditve 7.1. Naj bo L poljuben splet v evklidskem prostoru. Oglejmo si $\bar{\mu}_L$ invariante dolžine dva. Definiramo jih lahko že v

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_2(\mathbb{R}^3 - L)} \cong H_1(\mathbb{R}^3 - L).$$

Opazimo, da imamo v tej grupi za i -ti poldnevnik predstavnika

$$\beta_i = \sum_{j \neq i} \text{lk}(L_i, L_j) \alpha_j,$$

kjer so α_j poldnevniki. Potem je

$$M(\beta_j) = 1 + \sum_{i \neq j} \text{lk}(L_i, L_j) X_i + (\text{monomi stopnje} \geq 2).$$

Torej so $\bar{\mu}_L$ invariante dolžine dva natanko spletna števila. □

7.2 Primeri

Oglejmo si nekaj zanimivih primerov izračuna $\bar{\mu}$ invariant, kjer lahko z njihovo uporabo dosežemo zanimive rezultate, ter en primer, kjer se $\bar{\mu}$ invariante ne izkažejo za uporabne.

Primer 7.2. Če je L trivialen n -splet v $\mathbb{R}^3$, potem so vsi njegovi vzporedniki kontraktibilni in jih lahko predstavimo s praznimi besedami. Njihove Magnusove razširitve so torej enake 1. Potem je $\bar{\mu}_L(I) = 0$ za vsako končno zaporedje I elementov množice $\{1, \dots, n\}$. ◇

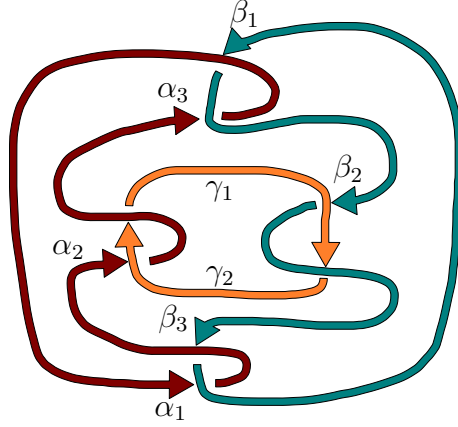
Primer 7.3. V primeru 6.2 smo za boromejske obročje v evklidskem prostoru že izračunali $\mu_L(231) = -1$. Ker so μ_L koeficienti dolžine 2 (spletna števila) vsi ničelni, je potem $\bar{\mu}_L(231) = -1$, kar pomeni, da boromejski obroči niso spletno homotopni ali ambientno izotopni trivialnemu 3-spletu. ◇

Primer 7.4. Za 3-splet L iz primera 5.12 in diagram na sliki 30 smo že izračunali Chen-Milnorjevo predstavitev

$$\frac{G(\mathbb{R}^3 - L)}{G_q(\mathbb{R}^3 - L)} = \left\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \mid [\alpha_1, v_1], [\beta_1, v_2], [\gamma_1, v_3], \langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle_q \right\rangle,$$

kjer so vzporedniki dani z

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta_1 \gamma_1 \alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1 \\ v_2 &= \alpha_1 \gamma_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \\ v_3 &= \gamma_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \gamma_1^2 \end{aligned}$$



Slika 30: Diagram 3-spleta L .

Iz diagrama lahko s pomočjo trditve 1.26 izračunamo spletna števila

$$\mu_L(12) = 2, \quad \mu_L(32) = -1, \quad \mu_L(13) = -1.$$

Naj bo I končno zaporedje elementov množice $\{1, 2, 3\}$ dolžine ≥ 3 , ki vsebuje elementa 1 in 3 (ali 2 in 3). Potem I kot podzaporedje vsebuje 13 ali 31 (oziroma 23 ali 32). Ker je $\mu_L(13) = \mu_L(31) = -1$ ($= \mu_L(23) = \mu_L(32)$), bo za taka zaporedja

$$\Delta_L(I) = \gcd(-1, \dots) = 1.$$

Ker je $k \bmod(1) = 0$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$, je potem $\bar{\mu}_L(I) = 0$. Neničelne $\bar{\mu}_L$ invariante dolžine ≥ 3 torej ne morejo vsebovati enice in trojice (oziroma dvojice in trojice) kot indeksa.

Izračunamo

$$\begin{aligned} M(v_2) &= (1 + X_1)(1 - X_3 + X_3^2 \pm \dots)(1 - X_2 + X_2^2 \pm \dots)(1 + X_1) = \\ &= 1 + 2X_1 - X_2 - X_3 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \pm \dots \end{aligned}$$

Ker je $\bar{\mu}_L(22) = -1$, lahko s podobnim argumentom kot zgoraj zagotovimo, da neničelne $\bar{\mu}_L$ invariante dolžine ≥ 3 ne morejo vsebovati dveh dvojic kot indeksa. Opazimo, da je tudi $\bar{\mu}_L(11) = -1$, saj se v v_1 faktor α_1 , ki nam v Magnusovi razširitvi da monom X_1 , pojavi dvakrat, faktor α_1^{-1} , ki nam v Magnusovi razširitvi da monom $-X_1$, pa trikrat. Torej neničelna $\bar{\mu}_L$ invarianta dolžine ≥ 3 ne more vsebovati dveh enic.

Razmislili smo torej, da so invariante dolžine ≥ 3 lahko neničelne le za zaporedja $I = 3 \dots 3$. Za izračun teh bomo potrebovali Magnusovo razširitev $M(v_3)$, kjer pa lahko izpustimo faktorje, različne od $\gamma_1^{\pm 1}$, saj nam vsi drugi faktorji v razširitvi

pripomorejo le monome, ki vsebujejo X_1 ali X_2 , ki nas ne zanimajo, saj nam vrnejo ničelne $\bar{\mu}_L$ invariante. Potem je

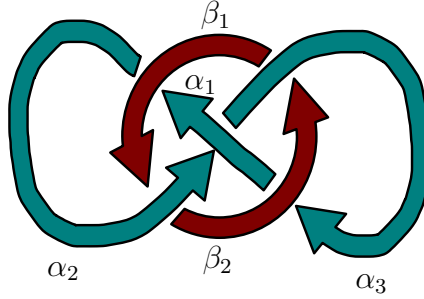
$$M(v_3) \sim M(\gamma_1 \gamma_1^{-1} \gamma_1^2) = M(\gamma_1^2) = (1 + X_3)^2 = 1 + 2X_3 + X_3^2.$$

Torej je $\mu_L(33) = 2$, $\mu_L(333) = 1$ in $\mu_L(3^n) = 0$ za $n \geq 4$. Izračunamo še $\Delta_L(333) = \gcd(\mu_L(33)) = 2$. Iz tega lahko za splet podamo vse neničelne Milnorjeve $\bar{\mu}_L$ invariante:

$$\begin{array}{lll} \bar{\mu}_L(11) = -1 & \bar{\mu}_L(22) = -1 & \bar{\mu}_L(33) = 2 \\ \bar{\mu}_L(12) = 2 & \bar{\mu}_L(13) = -1 & \bar{\mu}_L(23) = -1 \\ & \bar{\mu}_L(333) = 1. & \end{array}$$

◇

Primer 7.5. Še zadnjič si oglejmo Whiteheadov splet L z diagramom na sliki 31.



Slika 31: Diagram Whiteheadovega spleta.

Vzemimo poldnevnika α_1 in β_1 in s pomočjo trditve 3.8 dobimo vzporednika

$$v_1 = \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_2 \alpha_1 \quad \text{in} \quad v_2 = \alpha_2^{-1} \alpha_3.$$

Z relacijami iz Wirtingerjeve prezentacije izrazimo

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1}, \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} = \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}, \\ \beta_2 &= \alpha_2 \beta_1 \alpha_2^{-1} = \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1} \beta_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} = \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \end{aligned}$$

in iz tega dobimo

$$\begin{aligned} v_1 &= \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1} \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \\ v_2 &= \beta_1 \alpha_1^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_1^{-1} \alpha_1^{-1}, \end{aligned}$$

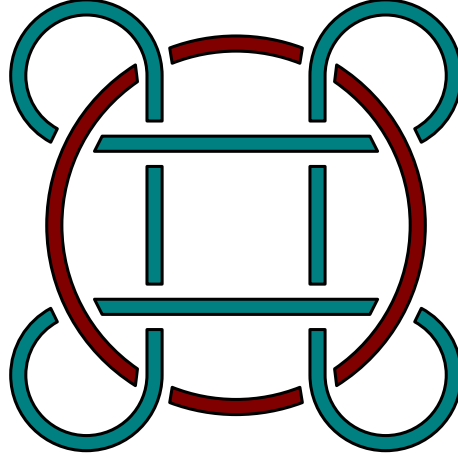
iz česar dobimo Chen-Milnorjevo predstavitev (izrek 5.8). Izračunamo

$$\begin{aligned} M(v_2) &= (1 + X_2)(1 - X_1 + X_1^2 \pm \dots)(1 - X_2 + X_2^2 \pm \dots)(1 + X_1) \\ &\quad (1 + X_2)(1 + X_1)(1 - X_2 + X_2^2 \pm \dots)(1 - X_1 + X_1^2 \pm \dots) = \\ &= 1 - X_1 X_1 X_2 - X_2 X_1 X_1 + 2X_1 X_2 X_1 \pm \dots \end{aligned}$$

Sledi, da je $\bar{\mu}_L(1122) = -1$ in torej Whiteheadov splet ni ambientno izotopen trivialnemu 2-spletu.

◇

Primer 7.6. Oglejmo si spleť L v $\mathbb{R}^3$ na sliki 32. Spleť je očitno spletno homotopen trivialnemu 2-spletu. Z nekaj truda lahko izračunamo, da ima spleť L Conwayev polinom (zelo pogosta invarianta za vozle in splete) $\nabla(L) = -3z^5 - z^4 + 2z^3$, kar pomeni, da ni ambientno izotopen trivialnemu spletu. Pokažemo lahko, da so vse $\bar{\mu}_L$ invariante tega spleta trivialne, saj lahko vzporednika predstavimo s trivialnima elementoma. Torej $\bar{\mu}_L$ invariante niso dovolj močne, da zaznajo vso prepletenost do ambientne izotopije natančno.



Slika 32: Diagram 2-spleta.

◇

7.3 Skoraj preprosti spleti

Definirajmo posebej zanimivo družino spletov.

Definicija 7.7 (Skoraj preprost spleť). Naj bo L n -spleť v $\mathbb{R}^3$. Potem pravimo, da je L **skoraj preprost**, če je $(n-1)$ -spleť $L^i = L - L_i$ spletno homotopen trivialnemu $(n-1)$ -spletu za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$.

Milnor je dokazal naslednji klasifikacijski izrek:

Izrek 7.8 ([11]). *Naj bo L skoraj preprost n -spleť v $\mathbb{R}^3$. Potem je L do spletne homotopije natančno določen z $(n-2)!$ invariantami*

$$\left\{ \bar{\mu}_L(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n) \mid \omega \in S_{n-2} \text{ poljubna permutacija} \right\}.$$

Za dokaz izreka moramo najprej vpeljati nekaj definicij ter dokazati nekaj lem, ki nam bodo poglobile naše razumevanje strukture spletne grupe trivialnega spleta.

Definicija 7.9 (Grupni kolobar spletne grupe in delovanje grupnega kolobarja). Naj bo L n -spleť v evklidskem prostoru in $G = \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ njegova spletna grupa. Definiramo **grupni kolobar $\mathbb{Z}G$ grupe G s koeficienti v $\mathbb{Z}$** kot množico končnih vsot $\sum_i k_i g_i$, kjer so $k_i \in \mathbb{Z}$ in $g_i \in G$, skupaj s seštevanjem

$$\left(\sum_i k_i g_i \right) + \left(\sum_j k'_j g'_j \right) = \sum_i k_i g_i + \sum_j k'_j g'_j$$

in množenjem

$$\left(\sum_i k_i g_i\right) \cdot \left(\sum_j k'_j g'_j\right) = \sum_{i,j} k_i k'_j g_i g'_j.$$

Naj bo α_i poldnevnik i -te komponente spleta L za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$. Po izreku 5.14 vemo, da so $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ravno generatorji grupe G . Potem lahko definiramo **delovanje grupnega kolobarja spletne grupe** $\mathbb{Z}G \curvearrowright G$. Delovanje je definirano s predpisom na generatorjih: za poljuben $\sigma = \sum_j k_j g_j \in \mathbb{Z}G$ in $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo

$$\alpha_i^\sigma = \prod_j g_j^{-1} \alpha_i^{k_j} g_j.$$

Delovanje je dobro definirano, saj imamo v G relacije $[\alpha_i, \alpha_i^\lambda]$ za vsaka $i \in \{1, \dots, n\}$ in $\lambda \in G$, kar pomeni, da α_i komutira z vsemi svojimi konjugirani. Seveda velja

$$\begin{aligned} (g_1 g_2)^\sigma &= g_1^\sigma g_2^\sigma, \\ g^{\sigma_1 + \sigma_2} &= g^{\sigma_1} g^{\sigma_2}, \\ g^{\sigma_1 \sigma_2} &= (g^{\sigma_1})^{\sigma_2}. \end{aligned}$$

za poljubne $g, g_1, g_2 \in G$ ter $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{Z}G$.

Lema 7.10. *Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru in $G = \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ njegova spletna grupa. Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ naj bo α_i poldnevnik i -te komponente. Te po izreku 5.14 generirajo G . Prav tako za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo $G^i = \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^i)$, ki je generirana z $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$, ter homomorfizem kolobarjev*

$$\pi_i : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G^i.$$

$$\alpha_j \mapsto \begin{cases} 1; & i = j \\ \alpha_j; & i \neq j \end{cases}$$

Naj bo $K_i = \ker(\pi_i)$ dvostranski ideal v $\mathbb{Z}G$ in K_i^2 produkt idealov $K_i \cdot K_i$ (in torej dvostranski ideal v $\mathbb{Z}G$).

Potem za $\sigma, \sigma' \in \mathbb{Z}G$ velja $\alpha_i^\sigma = \alpha_i^{\sigma'}$, če je

$$\sigma \equiv \sigma' \pmod{K_i + (K_1^2 + \dots + K_n^2)}$$

in lahko vsak element grupe $\mathcal{A}_i = \ker(G \rightarrow G^i)$ predstavimo kot α_i^σ za nek $\sigma \in \mathbb{Z}G^i$.

Dokaz leme 7.10. Izberimo poljubna $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ker je K_j jedro homomorfizma π_j , lahko vsak element ideala K_j zapišemo kot razliko $\gamma - \lambda$ za $\gamma \equiv \lambda \pmod{\mathcal{A}_j}$. Potem je

$$\begin{aligned} \alpha_i^{\gamma - \lambda} &= \gamma^{-1} \alpha_i \gamma \lambda^{-1} \alpha_i^{-1} \lambda \\ &\equiv \lambda^{-1} \alpha_i \lambda \lambda^{-1} \alpha_i^{-1} \lambda \pmod{\mathcal{A}_j} \\ &\equiv 1 \pmod{\mathcal{A}_j}. \end{aligned}$$

Torej je $\alpha_i^\sigma \in \mathcal{A}_j$ za vsak $\sigma \in K_j$. Posebej, za $i = j$ je $\gamma \lambda^{-1} \in \mathcal{A}_i$. Ker je $\mathcal{A}_i$ komutativna, je

$$\alpha_i^{\gamma - \lambda} = \gamma^{-1} \alpha_i (\gamma \lambda^{-1}) \alpha_i^{-1} \lambda = \gamma^{-1} (\gamma \lambda^{-1}) \alpha_i \alpha_i^{-1} \lambda = 1$$

Torej je $\alpha_i^\sigma = 1$ za vsak $\sigma \in K_i$.

Podobno lahko vsak element ideala K_j^2 zapišemo kot razliko $(\gamma - \lambda)\delta$ za $\delta \in K_j$ in $\gamma \equiv \lambda \pmod{\mathcal{A}_j}$. Ker je $\alpha_i^\delta, \gamma\lambda^{-1} \in \mathcal{A}_j$ dobimo

$$\alpha_i^{(\gamma-\lambda)\delta} = \gamma^{-1}\alpha_i^\delta(\gamma\lambda^{-1})\alpha_i^{-\delta}\lambda = \gamma^{-1}(\gamma\lambda^{-1})\alpha_i^\delta\alpha_i^{-\delta}\lambda = 1$$

Torej je $\alpha_i^\sigma = \alpha_i^{\sigma'}$ za

$$\sigma \equiv \sigma' \pmod{K_i + (K_1^2 + \dots + K_n^2)}.$$

Nazadnje, po trditvi 4.19 je $\mathcal{A}_i = (\alpha_i)$ in lahko torej vsak element iz $\mathcal{A}_i$ predstavimo kot produkt konjugatorjev potenc α_i . Potem direktno sledi, da lahko vsak element $\mathcal{A}_i$ predstavimo kot α_i^σ za $\sigma \in \mathbb{Z}G$. Po prvem delu trditve je dovolj vzeti $\sigma \in \mathbb{Z}G^i$. $\square$

Lema nam motivira naslednjo definicijo.

Definicija 7.11 (Reduciran grupni kolobar). Naj bo L n -splet v evklidskem prostoru. Po izreku 5.14 vemo, da je njegova spletna grupa $G := \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ generirana s poldnevnikami $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo grupo $G^i := \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^i)$ (ki je generirana z $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$). Kot v definiciji 7.9 in lemi 7.10 za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ definiramo tudi grupne kolobarje $\mathbb{Z}G$ in $\mathbb{Z}G^i$ skupaj s homomorfizmi kolobarjev

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{Z}G &\rightarrow \mathbb{Z}G^i, \\ \alpha_j &\mapsto \begin{cases} 1; & i = j \\ \alpha_j; & i \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

jedri homomorfizmov $K_i = \ker(\pi_i)$ ter ideali K_i^2 .

Potem je **reduciran grupni kolobar $\mathcal{R}G$ spletne grupe G** kvocientni kolobar

$$\mathcal{R}G := \frac{\mathbb{Z}G}{K_1^2 + \dots + K_n^2}.$$

Delovanje $\mathbb{Z}G \curvearrowright G$ nam inducira delovanje $\mathcal{R}G \curvearrowright G$. Po lemi 7.10 je to delovanje dobro definirano.

Opomba: lema 7.10 nam pove, da lahko vsak element grupe $\mathcal{A}_i$ predstavimo kot α_i^σ , kjer je $\sigma \in \mathcal{R}G^i$.

Lema 7.12. Definirajmo grupo $\mathcal{C}_n$, katere elementi so besede v $\{X_1, \dots, X_n\}$, v katerih se vsaka spremenljivka pojavi kvečjemu enkrat, množenje $\star$ med njimi pa je definirano na sledeč način:

$$(X_{i_1} \dots X_{i_p}) \star (X_{j_1} \dots X_{j_q}) = \begin{cases} 0; & \exists k, l : i_k = j_l \\ (X_{i_1} \dots X_{i_p} X_{j_1} \dots X_{j_q}); & \text{sicer} \end{cases}$$

Potem imamo za trivialen n -splet L v evklidskem prostoru, njegovo spletno grupo G , ki je generirana z $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, in njen reduciran grupni kolobar $\mathcal{R}G$, izomorfizem kolobarjev

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}\mathcal{C}_n &\rightarrow \mathcal{R}G. \\ X_{j_1} \dots X_{j_p} &\mapsto (\alpha_{j_1} - 1) \dots (\alpha_{j_p} - 1) \end{aligned}$$

Opomba: videli bomo, da je inverz ψ^{-1} definiran s predpisoma $\alpha_i \mapsto (1 + X_i)$ in $\alpha_i^{-1} \mapsto (1 - X_i)$.

Dokaz leme 7.12. Preverimo najprej, da je ψ homomorfizem kolobarjev. Jasno je, da komutira z vsotami in da ohranja enoto za množenje. Opazimo, da je

$$\begin{aligned} \psi((X_{i_1} \dots X_{i_p}))\psi((X_{j_1} \dots X_{j_q})) &= \\ &= (\alpha_{i_1} - 1) \dots (\alpha_{i_p} - 1)(\alpha_{j_1} - 1) \dots (\alpha_{j_q} - 1) \equiv \\ &\equiv 0 \pmod{K_1^2 + \dots + K_n^2}, \end{aligned}$$

če obstajata indeksa k in l , da je $i_k = j_l$. Torej ψ komutira tudi s produktom in je homomorfizem.

Definirajmo homomorfizem

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Z}G &\rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{C}_n. \\ \alpha_i &\mapsto 1 + X_i \\ \alpha_i^{-1} &\mapsto 1 - X_i \end{aligned}$$

Opazimo, da je kompozitum $\psi \circ \theta : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathcal{R}G$ ravno kanoničen epimorfizem, saj je

$$\psi(\theta(\alpha_i)) = \psi(1 + X_i) = 1 + (\alpha_i - 1) = \alpha_i,$$

in je jedro $\psi \circ \theta$ ravno $K_1^2 + \dots + K_n^2$. Potem je jedro ψ ravno $\theta(K_1^2 + \dots + K_n^2)$. Opazimo, da je K_i generiran z $(\alpha_i - 1)$. Sledi, da je $\theta(K_i)$ ravno vsota besed v $\mathbb{Z}\mathcal{C}_n$, ki vsebujejo X_i . Ker je produkt dveh takih besed v $\mathcal{C}_n$ enak nič, je $\theta(K_i^2) = 0$, torej je tudi $\theta(K_1^2 + \dots + K_n^2) = 0$. Potem ima ψ trivialno jedro in je izomorfizem. $\square$

Sedaj lahko dokažemo klasifikacijski izrek skoraj preprostih spleto v evklidskem prostoru.

Dokaz izreka 7.8. Naj bo L skoraj preprost n -splet v $\mathbb{R}^3$. Vzemimo vzporednik β_n n -te komponente spleta L , ki ima z L_n spletno število 0. Naj bo $f : \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^n)$ naravna izbira epimorfizma ter naj bo $\beta'_n = f(\beta_n)$. Po izreku 4.21 vemo, da je splet L do spletne homotopije natančno določen s spletom L^n in s konjugiranostnim razredom β'_n v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^n)$. Splet L^n je seveda že določen, saj je trivialen. Izrek bomo torej dokazali, ko β'_n izrazimo z invariantami $\bar{\mu}_L(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n)$ za $\omega \in S_{n-2}$.

Po izreku 5.14 je grupa $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^n)$ generirana z $n-1$ generatorji $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, ki predstavljajo poldnevnik. Ker je L^{n-1} trivialen splet, je

$$\beta'_n \in \mathcal{A}_{n-1}(L^n) = \ker \left(\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^n) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - (L^n)^{n-1}) \right).$$

Po lemi 7.10 lahko potem β'_n predstavimo kot α_{n-1}^σ za nek $\sigma \in \mathcal{R}G^{n-1,n}$, kjer je $G^{n-1,n}$ generirana z $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}$. Po lemi 7.12 pa lahko σ enolično predstavimo kot končno vsoto besed paroma različnih spremenljivk $X_1, \dots, X_{n-2}$ v $\mathbb{Z}\mathcal{C}_n$. Pišemo

$$\sigma' := \psi^{-1}(\sigma) = \sum \mu^*(i_1 \dots i_p) X_{i_1} \dots X_{i_p} \in \mathbb{Z}\mathcal{C}_n.$$

Pokazali bomo, da so koeficienti μ^* določeni z μ_L koeficienti.

Naj bo

$$\sigma = \psi(\sigma') = \sum \mu^*(i_1 \dots i_p)(\alpha_{i_1} - 1) \dots (\alpha_{i_p} - 1).$$

Pomagali si bomo z nekaj pomožnimi računi:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}^{(\alpha_i-1)} &= \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_{n-1}^{\alpha_i} = \alpha_{n-1}^{-1} \alpha_i^{-1} \alpha_{n-1} \alpha_i = [\alpha_{n-1}, \alpha_i], \\ \alpha_{n-1}^{(\alpha_{i_1}-1)(\alpha_{i_2}-1)} &= (\alpha_{n-1}^{(\alpha_{i_1}-1)})^{-1} \alpha_{i_2}^{-1} \alpha_{n-1}^{(\alpha_{i_1}-1)} \alpha_{i_2} = [[\alpha_{n-1}, \alpha_{i_1}], \alpha_{i_2}], \\ \alpha_{n-1}^{\mu^*(\alpha_{i_1}-1) \dots (\alpha_{i_p}-1)} &= [\dots [[\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}], \alpha_{i_2}], \dots, \alpha_{i_p}]. \end{aligned}$$

Zanimali nas bodo koeficienti v Magnusovi razširitvi β'_n pred monomi, ki vsebujejo paroma različne spremenljivke $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ in se končajo s X_{n-1} . Po izreku 2.9 vemo, da Magnusova razširitev k -krat iteriranega komutatorja nima členov dolžine $< n$. Potem lahko izračunamo:

$$\begin{aligned} M([\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_i]) &= (1 - X_{n-1} \pm \dots)^{\mu^*} (1 - X_i \pm \dots) (1 + X_{n-1})^{\mu^*} (1 + X_i) = \\ &= 1 - \mu^* X_i X_{n-1} + \dots, \\ M([\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}], \alpha_{i_2}) &= M([\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}]^{-1}) M(\alpha_{i_2}^{-1}) M([\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}]) M(\alpha_{i_2}) = \\ &= M([\alpha_{i_1}, \alpha_{n-1}^{\mu^*}]) (1 - X_{i_2} \pm \dots) M([\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}]) (1 + X_{i_2}) = \\ &= (1 + \mu^* X_{i_1} X_{n-1} + \dots) (1 - X_{i_2} \pm \dots) (1 - \mu^* X_{i_1} X_{n-1} + \dots) (1 + X_{i_2}) = \\ &= 1 + \mu^* X_{i_2} X_{i_1} X_{n-1} + \dots, \\ M([\dots [[\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}], \alpha_{i_2}], \dots, \alpha_{i_p}]) &= 1 + (-1)^p \mu^* X_{i_p} \dots X_{i_1} X_{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} M(\beta'_n) &= M(\alpha_{n-1}^\sigma) = M(\alpha_{n-1}^{\sum \mu^*(i_1 \dots i_p)(\alpha_{i_1}-1) \dots (\alpha_{i_p}-1)}) = \\ &= M(\prod \alpha_{n-1}^{\mu^*(i_1 \dots i_p)(\alpha_{i_1}-1) \dots (\alpha_{i_p}-1)}) = \\ &= \prod M(\alpha_{n-1}^{\mu^*(i_1 \dots i_p)(\alpha_{i_1}-1) \dots (\alpha_{i_p}-1)}) = \\ &= \prod M([\dots [[\alpha_{n-1}^{\mu^*}, \alpha_{i_1}], \alpha_{i_2}], \dots, \alpha_{i_p}]) = \\ &= \prod (1 + (-1)^p \mu^*(i_1 \dots i_p) X_{i_p} \dots X_{i_1} X_{n-1} + \dots) = \\ &= 1 + (\sum (-1)^p \mu^*(i_1 \dots i_p) X_{i_p} \dots X_{i_1} X_{n-1}) + \dots = \\ &= 1 + (\sum \mu_L(i_p \dots i_1 (n-1)n) X_{i_p} \dots X_{i_1} X_{n-1}) + \dots \end{aligned}$$

Ker so vsi podspleti L trivialni, so vsi μ_L koeficienti dolžine $< n$ ničelni in so torej μ^* koeficienti dolžine $< n-2$ ničelni. Potem res nimamo nobenih dodatnih monomov dolžine $< n-1$ in lahko zanemarimo preostali del vsote, ki smo ga pisali z »...«. Potem je za $\omega \in S_{n-2}$

$$\mu_L(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n) = (-1)^{n-2} \mu^*((n-2)^\omega \dots 1^\omega).$$

Prav tako iz dejstva, da so vsi μ_L koeficienti dolžine $< n$ ničelni, sledi, da so μ_L koeficienti dolžine n natanko $\bar{\mu}_L$ invariante in je

$$\sigma = \sum_{\omega \in S_{n-1}} \bar{\mu}_L(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n) X_{1^\omega} \dots X_{(n-2)^\omega}$$

določen z $(n-2)!$ invariantami

$$\left\{ \bar{\mu}_L \left(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n \right) \mid \omega \in S_{n-2} \text{ poljubna permutacija} \right\}.$$

S tem je izrek dokazan. □

Izkaže se, da je predstavitev elementa $\sigma \in \mathcal{RG}^{n-1,n}$ v zgornjem dokazu enolična in invariantna za spletno homotopijo. To lahko vidimo preko tega, da smo jo izrazili z $\bar{\mu}$ invariantami, to dejstvo pa se da pokazati tudi neodvisno od tega. Tako je Milnor $\bar{\mu}$ invariante prvotno definiral ravno kot koeficiente v predstavitvi σ [11].

Oglejmo si dva primera skoraj preprostih spletov.

Primer 7.13. Izrek 7.8 pravi, da je vsak skoraj preprost 3-splet L v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno določen z eno samo invarianto $\bar{\mu}_L(123)$. Potem lahko vsak skoraj preprost 3-splet do spletne homotopije natančno predstavimo z diagramom na sliki 33, kjer nam število obratov prve komponente do izbire orientacije natančno določa $\bar{\mu}_L(123)$ in s tem 3-splet, ki ga predstavlja.



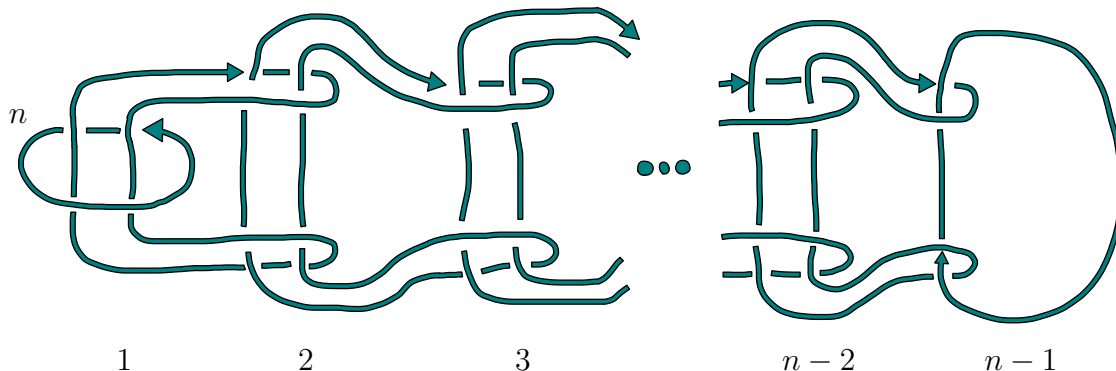
Slika 33: Univerzalna oblika skoraj preprostih 3-spletov v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno. ◇

Primer 7.14. Na sliki 34 je prikazan skoraj preprost n -splet L v $\mathbb{R}^3$, za katerega je

$$\bar{\mu}_L \left(1^\omega \dots (n-2)^\omega (n-1)n \right) = \begin{cases} 1; & \omega = \text{id} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Izračun $\bar{\mu}_L$ invariant ni težak, je pa dolg, zato ga bomo izpustili. Intuitivno to vidimo preko tega, da lahko generatorje Wirtingerjeve prezentacije, ki pripadajo

lokom zgornjega dela vsake komponente, rekurzivno izrazimo z generatorji, ki pripadajo lokom zgornjega dela naslednje komponente, dokler ne pridemo do $(n-1)$ -ve komponente. Potem se členi pred monomi $X_1^\omega \dots X_{(n-2)^\omega} X_{n-1}$ v razširitvi vzporednika n -te komponente paroma odštejejo, z izjemo enega člena, ki je enak 1: člena pred monomom $X_1 \dots X_{n-2} X_{n-1}$.



Slika 34: Skica skoraj preprostega n -spleta.

◇

7.4 Klasifikacija 3 in 4 spleto do spletne homotopije natančno

Milnor je pokazal, da so $\bar{\mu}$ invariante dovolj močne za določitev (spletne) homotopskega tipa poljubnega 3-spleta v evklidskem prostoru.

Izrek 7.15 ([11]). *Milnorjeve $\bar{\mu}$ invariante določajo 3-splete v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno.*

Dokaz izreka 7.15. Naj bo L poljuben 3-splet v evklidskem prostoru, α_1 , α_2 in α_3 poldnevnik prve, druge in tretje komponente, ter naj bo β_3 vzporednik tretje komponente spleta L v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L)$ s spletnim številom $\text{lk}(L_3, \beta_3) = 0$. Definiramo naravno izbiro epimorfizma $f : \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3)$ in $\beta'_3 = f(\beta_3)$. Potem je splet L po izreku 4.21 do spletne homotopije natančno določen s spletom L^3 in konjugiranostnim razredom β'_3 v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3)$.

Spomnimo se, da je po izreku 4.22 splet L^3 določen s spletnim številom $\mu_L(12)$. Opazimo, da sta vzporednika prve in druge komponente spleta L^3 v grupi $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3)$ določena z $\alpha_2^{\mu_L(12)}$ in $\alpha_1^{\mu_L(12)}$. Potem imamo po izreku 5.14 predstavitev

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3) = \langle \alpha_1, \alpha_2 \mid [\alpha_1, \alpha_2^{\mu_L(12)}], [\alpha_2, \alpha_1^{\mu_L(12)}], E \rangle.$$

Ker je po definiciji

$$\frac{\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3)}{\mathcal{A}_2} = \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - (L^3)^2) = \langle \alpha_1 \rangle,$$

je torej $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3) = \langle \alpha_1 \rangle \cdot \mathcal{A}_2$. Po lemi 7.10 lahko poljuben element iz $\mathcal{A}_2$ predstavimo kot produkt $\alpha_2^{y+z\alpha_1} = \alpha_2^y \alpha_1^{-1} \alpha_2^z \alpha_1$ za neka $y, z \in \mathbb{Z}$. Izkazalo se bo, da

bo bolj praktična ekvivalentna predstavitev $\alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)} = \alpha_2^{(y-z)+z\alpha_1}$. Potem lahko $\beta'_3 \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^3) = \langle \alpha_1 \rangle \cdot \mathcal{A}_2$ predstavimo kot

$$\beta'_3 = \alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)} = \alpha_1^x \alpha_2^{y-z} \alpha_1^{-1} \alpha_2^z \alpha_1$$

za neke $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Naš cilj je izraziti x, y in z z $\bar{\mu}_L$ invariantami.

Iz relacije $[\alpha_1, \alpha_2^{\mu_L(12)}]$ sledi, da je

$$\alpha_2^{\mu_L(12)(\alpha_1-1)} = \alpha_2^{\mu_L(12)\alpha_1} \alpha_2^{-\mu_L(12)} = \alpha_1^{-1} \alpha_2^{\mu_L(12)} \alpha_1 \alpha_2^{-\mu_L(12)} = 1.$$

Potem lahko z definiramo po modulu $\mu_L(12)$. Izračunajmo $\beta_3^{\alpha_1}$:

$$\begin{aligned} \beta_3^{\alpha_1} &= (\alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)})^{\alpha_1} = \alpha_1^{x\alpha_1} \alpha_2^{y\alpha_1+z(\alpha_1-1)\alpha_1} = \alpha_1^x \alpha_2^{y\alpha_1+z(\alpha_1^2-\alpha_1)} = \\ &= \alpha_1^x \alpha_2^y \alpha_2^{y\alpha_1-y} \alpha_1^{z(\alpha_1^2-\alpha_1)}. \end{aligned}$$

Opazimo, da je $\alpha_1^2 - \alpha_1 = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_1^2 - 2\alpha_1 + 1)$. Ker je $\alpha_1^2 - 2\alpha_1 + 1 = (\alpha_1 - 1)^2 \in K_1^2$, je potem $\alpha_1^2 - \alpha_1 = \alpha_1 - 1 \pmod{K_1^2}$, in je po lemi 7.10 $\alpha_2^{\alpha_1^2-\alpha_1} = \alpha_2^{\alpha_1-1}$. Potem je

$$\beta_3^{\alpha_1} = \alpha_1^x \alpha_2^y \alpha_2^{y\alpha_1-y} \alpha_1^{z(\alpha_1^2-\alpha_1)} = \alpha_1^x \alpha_2^y \alpha_2^{y(\alpha_1-1)} \alpha_1^{z(\alpha_1-1)} = \alpha_1^x \alpha_2^{y+(z+y)(\alpha_1-1)}.$$

Torej lahko z definiramo po modulu y . Izračunamo še $\beta_3^{\alpha_2}$:

$$\begin{aligned} \beta_3^{\alpha_2} &= (\alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)})^{\alpha_2} = \alpha_1^{x\alpha_2} \alpha_2^{y\alpha_2+z(\alpha_1-1)\alpha_2} = (\alpha_1^x \alpha_1^{-x}) \alpha_2^{-1} \alpha_1^x \alpha_2^y \alpha_2^{z(\alpha_1-1)\alpha_2} = \\ &= \alpha_1^x \alpha_2^{-\alpha_1^x} \alpha_2^y \alpha_2^{z(\alpha_1-1)} = \alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)} \alpha_2^{-\alpha_1^x+1} = \alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)} \alpha_2^{x-x\alpha_1} = \\ &= \alpha_1^x \alpha_2^{y+(z-x)(\alpha_1-1)}, \end{aligned}$$

kjer opazimo, da je

$$\begin{aligned} x - x\alpha_1 - (-\alpha_1^x + 1) &= (-x)(\alpha_1 - 1) + (\alpha_1^x - 1) = \\ &= (-x)(\alpha_1 - 1) + (\alpha_1 - 1)(\alpha_1^{x-1} + \alpha_1^{x-2} + \dots + 1) = \\ &= (\alpha_1 - 1)(-x + \alpha_1^{x-1} + \alpha_1^{x-2} + \dots + 1) \in K_1^2. \end{aligned}$$

Torej lahko z definiramo po modulu x .

Vzporednik β_3 lahko predstavimo kot produkt $\alpha_1^x \alpha_2^y \alpha_1^{-1} \alpha_2^z \alpha_1$ z nekimi vmesnimi faktorji, ki so enaki nekim potencom α_3 . Oglejmo si Magnusovo razširitev vzporednika β_3 . Ker nas bodo zanimali le koeficienti pred monomi, ki vključujejo X_3 , lahko izpustimo razširitve faktorjev $\alpha_3^{\pm 1}$ (in s tem v resnici gledamo razširitev β'_3). Dobimo

$$\begin{aligned} M(\beta_3) &\approx M(\beta'_3) = M(\alpha_1^x \alpha_2^{y+z(\alpha_1-1)}) = M(\alpha_1^x \alpha_2^{y-z} \alpha_1^{-1} \alpha_2^z \alpha_1) = \\ &= (1 + X_1)^x (1 + X_2)^{y-z} (1 - X_1 + X_1^2 \mp \dots) (1 + X_2)^z (1 + X_1) \end{aligned}$$

Koeficienta pred monomoma X_1 in X_2 v tej razširitvi sta po definiciji ravno spletni števili $\mu_L(13)$ in $\mu_L(23)$, koeficient pred monomom $X_2 X_1$ pa je ravno koeficient $\mu_L(213)$, ki ni nujno invarianta. Potem je $x = \mu_L(13)$, $y = \mu_L(23)$ in

$$\mu_L(213) = (y - z)(-1) + (y - z) + z = z.$$

Ker je $\Delta_L(213) = \gcd\{\mu_L(12), \mu_L(13), \mu_L(23)\}$ in je z definiran po modulu $\mu_L(12)$, $\mu_L(13)$ in $\mu_L(23)$, je

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_L(213) &\equiv z \pmod{\gcd\{\mu_L(12), \mu_L(13), \mu_L(23)\}} \\ &= z.\end{aligned}$$

Potem smo definirali $x = \mu_L(13)$, $y = \mu_L(23)$ in $z = \bar{\mu}_L(213)$. S tem je naš izrek dokazan. □

Relativno preprosta klasifikacija 3-spletov je botrovala upanju, da je popolna klasifikacija spletov do spletne homotopije mogoča. Izkazalo pa se je, da je tak rezultat morda težje dobiti, kot se je sprva slutilo. Šele leta 1988, dobrih 30 let po Milnorjevih prvotnih člankih, je matematik Jerome Paul Levine uspel klasificirati 4-splete v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno. To je storil v članku »An approach to homotopy classification of links« [7] z modifikacijo $\bar{\mu}$ invariant.

Izrek 7.16 (Levine [7]). *Modifikacija $\bar{\mu}$ invariant klasificira 4-splete v evklidskem prostoru do spletne homotopije natančno.*

Dokaz temelji na tem, da je (spletno) homotopski tip n -spleta L v $\mathbb{R}^3$ odvisen le od spleta L^n in orbite elementa L_n v $\mathcal{G}(\mathbb{R}^3 - L^n)$ pri delovanju geometrijskih avtomorfizmov, to je avtomorfizmov, ki jih inducirajo spletne homotopije spleta L^n samega nase. Ta rezultat je analogen rezultatu izreka 4.21, pri čemer pa ohranja ohranja dodatno strukturo, ki jo je Levine definiral za splete. Klasifikacija geometrijskih avtomorfizmov za 3-splete, ki je podana v članku, potem doseže polno klasifikacijo 4-spletov.

Po drugi strani sta matematika Nathan Habegger in Xiao-Song Lin preučevala spletno homotopijo v kontekstu strunastih spletov, posplošitve kit, kjer sta tudi dosegla polno klasifikacijo do spletne homotopije natančno (članek »The classification of links up to link-homotopy« [5]). Vsak splet v evklidskem prostoru lahko predstavimo kot zaprtje strunastega spleta. Težava pri klasifikaciji spletov v tem kontekstu postane ugotavljanje, kateri strunasti spleti predstavljajo iste splete.

7.5 Nadaljnje delo

Področje raziskovanja Milnorjevih invariant in spletne homotopije je aktivno. Le v zadnjih letih se je pojavilo več zanimivih člankov, napisanih na to tematiko. Izpostavimo nekaj zanimivih tematik, v katere bi se bilo smiselno poglobiti v prihodnosti.

Junija 2023 je Ryan Stees objavil doktorsko disertacijo, ki definira Milnorjeve $\bar{\mu}$ invariante v poljubni sklenjeni orientabilni 3-mnogoterosti. Vsebina disertacije se pojavi na arXiv-u pod naslovom »Milnor's invariants for knots and links in closed orientable 3-manifolds« [14]. Zanimivo bi bilo razmisliti, kako se te invariante obnašajo za splete v preprostih 3-mnogoterostih, kot so lečasti prostori. Smiselno bi bilo tudi poskusiti poiskati klasifikacijo spletno homotopskih tipov spletov $z \leq 4$ komponentami v teh prostorih, bodisi z uporabo teh bodisi s konstrukcijo novih invariant. Pri tem so lečasti prostori naravna izbira, saj o spletih v lečastih prostorih v literaturi najdemo že kar nekaj znanih rezultatov. Omenimo še preprost razmislek,

da se klasifikacija spletno homotopskega tipa spletov z ≤ 3 komponentami v polnem torusu zdi trivialna, saj lahko $\mathbb{R}^3$ (oziroma kompaktifikacijo $\mathbb{S}^3$) predstavimo kot unijo dveh polnih torusov in uporabimo Levinovo klasifikacijo 4-spletov za splet, ki ga dobimo, ko združimo poljuben 3-splet v enem polnem torusu z vzporednikom drugega.

Po drugi strani bi bilo morda smiselno poskusiti poiskati nove invariante za spletno homotopijo, tako v evklidskem prostoru kot nasploh. V klasični teoriji vozlov obstaja cel kup invariant za ambientno izotopijo, ki jih bi bilo morda možno reducirati do invariant za spletno homotopijo. Tu bi izpostavili Habeggerjev in Linov pristop s strunastimi spleti, ki smo ga omenili že v prejšnem razdelku. Zdi se, da bi lahko bolj raziskali grupno strukturo strunastih spletov in preko tega izluščili dodatne informacije in invariante za spletno homotopijo.

Nazadnje bi razmislili o implementaciji računalniškega algoritma za izračun $\bar{\mu}$ invariant. Težava v računski kompleksnosti se pojavi na dveh ključnih korakih. Prvič, za definicijo $\bar{\mu}$ invariant moramo poiskati vzporednike v grupi $\frac{G(\mathbb{R}^3-L)}{G_q(\mathbb{R}^3-L)}$. Dokaz Chen-Milnorjeve predstavitev nam poda algoritem, vendar dolžine ustreznih besed rastejo zelo hitro. To vodi v kasnejše probleme, ko moramo izračunati Magnusove razširitve teh besed. Poleg tega je potrebno za izračun invariante dolžine k najprej poiskati kar nekaj μ koeficientov dolžine $< k$. Po osnovni oceni se zdi, da število teh koeficientov raste s fakulteto dolžine invariante. Lahko bi se osredotočili le na izračun prvih neničelnih invariant, kar bi problem bistveno poenostavilo, saj v tem primeru zadošča le izračun μ koeficientov.

Dokaz izreka 5.3

Ponovno si oglejmo izrek 5.3 iz razdelka 5.1 in navedimo dokaz.

Izrek 5.3 (Milnor [10]). *Naj bo L splet v mnogoterosti M . Za vsak $q \in \mathbb{N}$ obstaja okolica N spleta L , tako da za vsak splet L' , ki leži v N in je spletno homotopen L , velja:*

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \cong \frac{G(M - L')}{K_q(M - L', M)}.$$

Dokaz izreka 5.3. Naj bo L splet v mnogoterosti M in $q \in \mathbb{N}$.

(●) Omejimo se najprej na primere, ko ima splet L eno samo komponento:

Naj bo

$$M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_q$$

zaporedje povezanih odprtih okolic L , tako da imamo znotraj N_k deformacijo N_{k+1} v L , torej, da je vložitev $\iota_{k+1} : N_{k+1} \hookrightarrow N_k$ homotopna preslikavi, ki slika N_{k+1} v L . Tako zaporedje okolic obstaja, saj je L ANR (absolutni okoliški retrakt).

Naj bo $x_0 \in N_q - L$. Pokažimo, da lahko za vsak element $\alpha \in K(N_k - L, N_k)$, ki je neka zanka v $N_k - L$, definiramo spletno število $\text{lk}(\alpha, L)$. To spletno število lahko definiramo, saj lahko izberemo orientaciji L in M , elemente grupe $K(N_k - L, N_k)$ pa lahko predstavimo z zankami okoli L v neki evklidski okolici znotraj M (pri tem moramo izbrati bazno točko v tej evklidski okolici). Potem je spletno število dobro definirano, saj smo že pokazali, da je spletno število invariantno za homotopije zank (trditev 4.9).

Opazimo, da za dve zanki $\alpha_1, \alpha_2 \in K(N_k - L, N_k)$ velja

$$\text{lk}(\alpha_1 \cdot \alpha_2, L) = \text{lk}(\alpha_1, L) + \text{lk}(\alpha_2, L).$$

Potem je množica vseh zank α s spletnim številom $\text{lk}(\alpha, L) = 0$ podgrupa jedra $K(N_k - L, N_k)$. Označimo jo s $Q(N_k - L, N_k)$.

Za dokaz izreka bomo potrebovali štiri leme.

Lema 7.17. *Vložitveni homomorfizem*

$$K(N_k - L, N_k) \rightarrow K(N_{k-1} - L, N_{k-1})$$

slika grupo $Q(N_k - L, N_k)$ v komutatorsko podgrupo $K_2(N_{k-1} - L, N_{k-1})$.

Dokaz leme 7.17. Naj bo U_k univerzalni krovni prostor okolice N_k in V_k prasluka spleta L v U_k . Potem je (kot v dokazu izreka 4.17)

$$\pi_1(U_k - V_k) \cong K(N_k - L, N_k)$$

in posledično

$$\frac{K(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)} \cong H_1(U_k - V_k).$$

Vložitev $\iota_k : N_k \hookrightarrow N_{k-1}$ nam inducira vložitvi

$$U_k \hookrightarrow U_{k-1} \quad \text{in} \quad U_k - V_k \hookrightarrow U_{k-1} - V_{k-1}.$$

Naj bo $U_k \cup \infty$ kompaktifikacija krovne prostora U_k z eno točko. Po Poincaré-Lefschetzovi dualnosti imamo izomorfizem

$$H_1(U_k - V_k) = H_1((U_k \cup \infty) - (V_k \cup \infty)) \cong H^2(U_k \cup \infty, V_k \cup \infty).$$

Opazimo, da je $H^2(U_k \cup \infty, \infty) \cong H_1(U_k) = 0$ in si ogledamo eksaktno zaporedje kohomoloških grup

$$H^1(V_k \cup \infty, \infty) \xrightarrow{\delta} H^2(U_k \cup \infty, V_k \cup \infty) \rightarrow H^2(U_k \cup \infty, \infty).$$

Grupa $H^1(V_k \cup \infty, \infty)$ je prosto generirana Abelova grupa z enim generatorjem γ_l za vsako komponento V_k . Potem je $H^2(U_k \cup \infty, V_k \cup \infty)$ generirana s slikami $\delta(\gamma_l)$. Zložimo skupaj do sedaj dobljene izomorfizme in dobimo

$$\frac{K(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)} \cong H_1(U_k - V_k) \cong H^2(U_k \cup \infty, V_k \cup \infty) = \langle \delta(\gamma_k) \rangle.$$

Izomorfizem grup $H^2(U_k \cup \infty, V_k \cup \infty) \cong H_1(U_k - V_k)$ nam slika generator $\delta(\gamma_l)$ v zanko α_l okoli l -te komponente V_k . Ta zanka seveda ni trivialna, saj se preko izomorfizma preslika v generator $H_1(U_k - V_k)$. Izomorfizem

$$H_1(U_k - V_k) \cong \frac{K(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)}$$

potem slika zanke α_l v zanke α'_l s spletnim številom $\text{lk}(\alpha'_l, L) = \pm 1$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da so vsa ta spletna števila enaka $+1$. Naj bo

$$\sum c_l \alpha_l \in H_1(U_k - V_k)$$

poljuben. Potem imamo

$$\text{lk}\left(\sum c_l \alpha'_l, L\right) = \sum c_l, \text{ kjer je } \sum c_l \alpha'_l \in \frac{K(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)}.$$

Elementi grupe

$$\frac{Q(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)}$$

so v $H_1(U_k - V_k)$ predstavljeni z verigami $\sum c_l \alpha_l$, kjer je $\sum c_l = 0$. Opazimo, da vložitev $\iota_k : U_k \hookrightarrow U_{k-1}$ slika vse komponente V_k v eno samo komponento V_{k-1} , saj lahko N_k znotraj N_{k-1} deformiramo na L . Induciran homomorfizem na homoloških grupah

$$(\iota_k)_* : H_1(U_k - V_k) \rightarrow H_1(U_{k-1} - V_{k-1})$$

potem slika vse generatorje α_l grupe $H_1(U_k - V_k)$ v en sam element $\bar{\alpha} \in H_1(U_{k-1} - V_{k-1})$ in posledično je

$$(\iota_k)_*\left(\sum c_l \alpha_l\right) = \left(\sum c_l\right)\bar{\alpha}.$$

Potem je očitno, da induciran homomorfizem na fundamentalnih grupah

$$(\iota_k)_\# : \frac{K(N_k - L, N_k)}{K_2(N_k - L, N_k)} \rightarrow \frac{K(N_{k-1} - L, N_{k-1})}{K_2(N_{k-1} - L, N_{k-1})}$$

slika $Q(N_k - L, N_k)$ v $K_2(N_{k-1} - L, N_{k-1})$.

□

Lema 7.18. *Vložitveni homomorfizem*

$$K(N_k - L, N_k) \rightarrow K(M - L, M)$$

slika grupo $Q(N_k - L, N_k)$ v $K_{k+1}(M - L, M)$.

Dokaz leme 7.18. Lemo dokažemo s pomočjo indukcije na k . Za $k = 1$ je to ravno lema 7.17. Naj bo torej k poljubno naravno število in naj lema drži za $1, \dots, k-1$. Naj bo $\alpha \in K(N_{k-1} - L, N_{k-1})$ tak element, da velja $\text{lk}(\alpha, L) = 1$. Potem lahko vsak element grupe $K(N_{k-1} - L, N_{k-1})$ predstavimo kot produkt $\alpha^h \lambda$, kjer je $\lambda \in Q(N_{k-1} - L, N_{k-1})$ in $h \in \mathbb{Z}$. Oglejmo si kompozitum vložitvenih homomorfizmov

$$K(N_k - L, N_k) \xrightarrow{(\iota_k)_\#} K(N_{k-1} - L, N_{k-1}) \xrightarrow{f} K(M - L, M).$$

Naj bo $\sigma \in Q(N_k - L, N_k)$. Po lemi 7.17 lahko $(\iota_k)_\#(\sigma)$ pišemo kot produkt

$$\prod_i [\alpha^{h_i} \lambda_i, \alpha^{h'_i} \lambda'_i] \in K_2(N_{k-1} - L, N_{k-1}),$$

kjer so λ_i in λ'_i v $Q(N_{k-1} - L, N_{k-1})$ in $h_i, h'_i \in \mathbb{Z}$. Potem je

$$f((\iota_k)_\#(\sigma)) = \prod_i [\bar{\alpha}^{h_i} \bar{\lambda}_i, \bar{\alpha}^{h'_i} \bar{\lambda}'_i] \in K(M - L, M).$$

Po indukcijski predpostavki so $\bar{\lambda}_i$ in $\bar{\lambda}'_i$ elementi $K_k(M - L, L)$. Ker je $f((\iota_k)_\#(\sigma))$ produkt komutatorjev takih elementov, je potem $f((\iota_k)_\#(\sigma)) \in K_{k+1}(M - L, M)$, kar konča dokaz leme. $\square$

Naj bo $N \subset N_q$ taka okolica spleta L , da je $N_q - \bar{N}$ povezana množica in da vsebuje:

- točko x_0 ,
- zanko α s spletnim številom $\text{lk}(\alpha, L) = +1$, ki je v N_q homotopsko trivialna,
- zanko β , ki je v N_q homotopna L .

Opomba: zanki α in β sta seveda poldnevnik in vzporednik našega spleta L .

Lema 7.19. *Naravna izbira homomorfizma*

$$\pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}$$

je epimorfizem za vsak $q \geq 2$.

Dokaz leme 7.19. Naj bo $q \geq 2$. Pokazati želimo, da lahko vsako zanko v $M - L$ zapišemo do homotopije natančno kot produkt zank iz $M - \bar{N}$ in zank iz $M - L$, ki so q -ti komutatorji kontraktibilnih zank v M .

Ker sta $M - \bar{N}$ in $N_q - L$ povezani odprti množici in je njun presek $N_q - \bar{N}$ povezan, njuna unija pa cel $M - L$, lahko vsako zanko v $M - L$ predstavimo do homotopije natančno kot produkt zank iz $M - \bar{N}$ in $N_q - L$. Dokaz leme je končan,

ko pokažemo, da lahko poljubno zanko $\gamma \in N_q - L$ zapišemo kot produkt zanke $\gamma' \in N_q - \bar{N}$ in zanke $\gamma'' \in K_q(M - L, M)$.

Oglejmo si vložitveni homomorfizem

$$v_{\#} : \pi_1(N_q - L) \rightarrow \pi_1(N_{q-1}).$$

Ker lahko N_q znotraj N_{q-1} deformiramo na L , je slika $\text{im}(v_{\#})$ generirana z zanko, homotopno L . Za to zanko lahko vzamemo vzporednik β . Ker je ta slika izomorfna

$$\frac{\pi_1(N_q - L)}{K(N_q - L, N_{q-1})},$$

je tudi ta grupa generirana z β . Opazimo, da je

$$\frac{K(N_q - L, N_{q-1})}{Q(N_q - L, N_{q-1})}$$

generirana s poldnevnikom α . Potem je grupa

$$\frac{\pi_1(N_q - L)}{Q(N_q - L, N_{q-1})}$$

generirana z α in β . Potem je vsaka zanka $\gamma \in N_q - L$ produkt zank $\gamma' = \alpha^i \beta^j \in N_q - \bar{N}$ in $\gamma'' \in Q(N_q - L, N_{q-1})$. Oglejmo si kompozitum homomorfizmov

$$\pi_1(N_q - L) \xrightarrow{f} \pi_1(N_{q-1} - L) \xrightarrow{g} G(M - L).$$

Po lemi 7.18 je $f(Q(N_q - L, N_{q-1})) \subset Q(N_{q-1} - L, N_{q-1})$ in $g(f(Q(N_q - L, N_{q-1}))) \subset K_q(M - L, M)$. Torej je $g(f(\gamma'')) \in K_q(M - L, M)$. To je predstavitev γ'' v $K_q(M - L, M)$. S tem je dokaz leme končan. □

Naj bo $Q' \trianglelefteq \pi_1(M - \bar{N})$ podgrupa edinka, generirana s sliko $Q(N_q - \bar{N}, N_{q-1})$, ki jo inducira vložitev $N_q - \bar{N} \hookrightarrow M - \bar{N}$.

Lema 7.20. *Jedro homomorfizma*

$$\pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}$$

je enako $Q'K_q(M - \bar{N}, M)$ za $q \geq 2$.

Dokaz leme 7.20. Naj bo $q \geq 2$. Ni težko videti, da je $K_q(M - \bar{N}, M)$ v tem jedru. Oglejmo si kompozitum vložitvenih homomorfizmov

$$\pi_1(N_q - \bar{N}) \xrightarrow{f} \pi_1(N_{q-1} - L) \xrightarrow{g} G(M - L).$$

Opazimo, da je $f(Q(N_q - \bar{N}, N_{q-1})) \subset Q(N_{q-1} - L, N_{q-1})$ in $g(f(Q(N_q - \bar{N}, N_{q-1}))) \subset K_q(M - L, M)$. Potem imamo homomorfizem

$$\eta : \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'K_q(M - \bar{N}, M)} \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}.$$

Želeli bi pokazati, da je η izomorfizem. V ta namen bomo konstruirali inverz. Naj bo

$$\sigma_1 : \pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'}$$

kvocientni epimorfizem. Opazimo, da je homomorfizem

$$\varphi : \frac{\pi_1(N_q - \bar{N})}{Q(N_q - \bar{N}, N_{q-1})} \rightarrow \frac{\pi_1(N_q - L)}{Q(N_q - L, N_{q-1})}$$

surjektiven, saj smo v lemi 7.19 pokazali, da je desna grupa generirana z α in β . Njegovo jedro je trivialno, saj se zanka v $N_q - \bar{N}$ slika v trivialen element le, če je kontraktibilna v N_{q-1} in ima spletno število 0 z L , kar pa je natanko tedaj, ko je trivialna v $N_q - \bar{N}$. Torej je φ izomorfizem in obrnljiv. Definiramo kompozitum homomorfizmov

$$\sigma_2 : \pi_1(N_q - L) \rightarrow \frac{\pi_1(N_q - L)}{Q(N_q - L, N_{q-1})} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \frac{\pi_1(N_q - \bar{N})}{Q(N_q - \bar{N}, N_{q-1})} \rightarrow \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'}.$$

V luči izreka Seiferta in van Kampena nam σ_1 in σ_2 definirata homomorfizem

$$G(M - L) = \pi_1((M - \bar{N}) \cup (N_q - L)) \xrightarrow{\sigma_1, \sigma_2} \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'},$$

saj za vložitvi

$$\begin{aligned} i_1 : (M - \bar{N}) \cap (N_q - L) &= N_q - \bar{N} \rightarrow (M - \bar{N}) \\ i_2 : (M - \bar{N}) \cap (N_q - L) &= N_q - \bar{N} \rightarrow (N_q - L) \end{aligned}$$

velja $\sigma_1 \circ (i_1)_\# = \sigma_2 \circ (i_2)_\#$ in se torej σ_1 in σ_2 ujemata na preseku $N_q - \bar{N}$. Potem $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ inducira homomorfizem

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \rightarrow \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'K_q(M - \bar{N}, M)},$$

ki je inverz η . Torej je η izomorfizem in je jedro homomorfizma

$$\pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}$$

enako $Q'K_q(M - \bar{N}, M)$. □

Naj bo L' poljuben splet v N , ki je homotopen spletu L . Potem lahko vsak N_k znotraj N_{k-1} deformiramo tako na L , kot tudi na L' . Potem leme 7.17, 7.18, 7.19 in 7.20 veljajo za L in L' . Ker ima poljubna zanka v $N_q - \bar{N}$ enako spletno število z L in L' , imata vložitvena homomorfizma

$$\pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \text{ in } \pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L')}{K_q(M - L', M)}$$

isto jedro $Q'K_q(M - \bar{N}, M)$. Ker sta po lemi 7.19 oba surjektivna, imamo izomorfizem

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \cong \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q'K_q(M - \bar{N}, M)} \cong \frac{G(M - L')}{K_q(M - L', M)}.$$

To konča naš dokaz za splete z eno komponento.

(●●) Poljuben splet L :

Naj bo L poljuben n -splet. Potem konstruiramo okolico N^i za vsako komponento posebej, kot v primeru spleta z eno samo komponento. Naj bo $N = N^1 \cup \dots \cup N^n$. V konstrukciji okolice N^i smo imeli bazno točko $x_0^i \in N_q^i - L$. Sedaj izberemo bazno točko $x_0 \in M - \bar{N}$ in za vsak i pot p_i , ki vodi od x_0 do x_0^i . Te poti ne spremenijo dokazov naših lem. Potem je jedro homomorfizma

$$\pi_1(M - \bar{N}) \rightarrow \frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)}$$

enako

$$Q^1 \dots Q^n K_q(M - \bar{N}, M).$$

Sledi, da za dva homotopna spleta L in L' v N velja

$$\frac{G(M - L)}{K_q(M - L, M)} \cong \frac{\pi_1(M - \bar{N})}{Q^1 \dots Q^n K_q(M - \bar{N}, M)} \cong \frac{G(M - L')}{K_q(M - L', M)}.$$

S tem je naš izrek dokazan.

□

Literatura

- [1] M. Borodzik, M. Powell in P. Teichner, *Link concordance implies link homotopy*, 2025, arXiv: 2503.04348 [math.GT], dostopno na <https://arxiv.org/abs/2503.04348>.
- [2] G. Burde in H. Zieschang, *Knots*, 2. izd., De Gruyter Studies in Mathematics **5**, Walter de Gruyter, 2003.
- [3] K.-T. Chen, *Isotopy invariants of links*, The Annals of Mathematics **56**(2) (1952).
- [4] K.-T. Chen, R. H. Fox in R. C. Lyndon, *Free differential calculus, iv. the quotient groups of the lower central series*, The Annals of Mathematics **68**(1) (1958).
- [5] N. Habegger in X.-S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, Journal of the American Mathematical Society **3**(2) (1990).
- [6] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] J. P. Levine, *An approach to homotopy classification of links*, Transactions of the American Mathematical Society **306**(1) (1988).
- [8] X.-S. Lin, *Power series expansions and invariants of links*, v: Geometric Topology (ur. W. Kazez), American Mathematical Society, 1997, str. 184–202.
- [9] W. Magnus, A. Karrass in D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Pure and Applied Mathematics **13**, Interscience Publishers, 1966.
- [10] J. Milnor, *Isotopy of links*, v: Algebraic Geometry and Topology (ur. R. H. Fox), Princeton University Press, 1957, str. 280–306.
- [11] J. Milnor, *Link groups*, Annals of Mathematics **59**(2) (1954) 177–195.
- [12] J. Milnor, *Most knots are wild*, Fundamenta Mathematicae **54**(3) (1964) 335–338, dostopno na <http://eudml.org/doc/213768>.
- [13] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematical Lecture Series 7, Publish or Perish, 1976.
- [14] R. Stees, *Milnor's invariants for knots and links in closed orientable 3-manifolds*, 2024, arXiv: 2310.10918 [math.GT], dostopno na <https://arxiv.org/abs/2310.10918>.